

Gruppisomorfi

Definition: En **isomorfi** mellan grupperna $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$:

en **bijektion** $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ sådan att

$$\phi(g * g') = \phi(g) \circ \phi(g') \quad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

Vi skriver $(G_1, *) \approx (G_2, \circ)$ (eller oftast bara $G_1 \approx G_2$) då G_1 och G_2 är isomorfa (dvs det finns en isomorfi mellan dem).

Isomorfi är en **ekvivalensrelation** mellan grupper.

Alla cykliska grupper av samma ordning är isomorfa. Om $G = \langle g \rangle$ och $H = \langle h \rangle$ med $|G| = |H|$ ges en isomorfi av $\phi : G \rightarrow H$ med $\phi(g^k) = h^k$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Delgrupper

Definition: H är en **delgrupp** till $(G, *)$ omm

$$H \subseteq G \text{ och } (H, *) \text{ är en grupp.}$$

Sats: Om G är en grupp och $H \subseteq G$ gäller att

$$H \text{ är en delgrupp till } G \Leftrightarrow \begin{cases} S0 : & H \neq \emptyset \\ S1 : & x, y \in H \Rightarrow xy \in H \\ S2 : & x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{cases}$$

Om H är **ändlig**, räcker S0 och S1.

Exempel på delgrupper till en grupp G :

G och $\{1\}$ är alltid delgrupper till G (där 1 förstås är identitets-elementet i G).

G :s **centrum** $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \text{ alla } g \in G\}$ är en delgrupp till G .

Centralisatorn för g , $C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$, är för varje $g \in G$ en delgrupp till G .

$$Z(G) = G \Leftrightarrow G \text{ är abelsk, } g \in Z(G) \Leftrightarrow C(g) = G, \quad Z(G) = \bigcap_{g \in G} C(g).$$

För varje $g \in G$ är $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ en delgrupp, den **cykliska delgruppen** som genereras av g . Dess ordning är lika med g :s ordning, $|\langle g \rangle| = o(g)$.

Om H och K är delgrupper till G är $H \cap K$ också det (men $H \cup K$ behöver inte vara det).

Den **alternerande gruppen** $A_n = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = 1\}$ med alla jämna permutationer är en delgrupp till S_n (den **symmetriska gruppen** av alla permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$).

Direkt produkt av grupper (Kommer nästa föreläsning.)

Direkta produkten av grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$,

$(G_1, *_1) \times (G_2, *_2) = (G_1 \times G_2, \circ)$, med $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$, är en grupp.

Ex. Om $\text{sgd}(m, n) = 1$ är $(\mathbb{Z}_m, +) \times (\mathbb{Z}_n, +) \approx (\mathbb{Z}_{mn}, +)$
(de är båda cykliska grupper av ordning mn).