(SF1662 Diskret matte, vt17: F12, ti 21 februari 2017)

Principen om inklusion och exklusion (sållprincipen)

$$|\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{(-1)^{i+1}\alpha_i}$$

$$\text{där} \quad \alpha_i = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_i \le n} |A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}|.$$

ex. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$

$$= \underbrace{(|A_1| + |A_2| + |A_3|)}_{\alpha_1} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_2} + \underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{\alpha_3}$$

Som ett exempel visade vi att andelen av alla permutationer f av en n-mängd som för alla x uppfyller $f(x) \neq x$ är

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{(-1)^k}}{\boldsymbol{k!}} \left(= \frac{1}{e} + \frac{(-1)^n\, e^{\xi_n}}{(n+1)!}, \quad \text{för något } \xi_n,\ -1 < \xi_n < 0 \right).$$

"Sannolikheten att ingen får sin egen hatt om n hattar fördelas på måfå (dvs likafördelat) bland ägarna är nära $\frac{1}{e}$ (nästan oberoende av n (inte för litet))."

Stirlingtalen (av andra slaget) $\boldsymbol{S(n,k)}$: **antalet partitioner** (uppdelningar) av en n-mängd i precis k (icke-tomma) delar.

Rekursivt: $\begin{cases} S(n,1) = S(n,n) = 1, & n = 1, 2, \ldots \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), & 1 < k < n \end{cases}$

"Stirlings triangel":

					1							
				1		1						
			1		3		1					
		1		7		6		1				
	1		15		25		10		1			
1		31		90		65		15		1		
1	63		301		350		140		21		1	
					⋮							

Om $|X| = n$ och $|Y| = k$ är antalet **surjektioner** $\boldsymbol{f: X \to Y}$

$$k!\, S(n,k)$$

Antalet **ekvivalensrelationer** på X = antalet **partitioner** av X =

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k), \quad (|X| = n)$$

Men varför är

$$\sum_{i=1}^{\min(k,n)} S(n,i)(k)_i = k^n \ ?$$