Logisk följd

$\{p_1, \ldots, p_n\} \vDash q$ (ofta skrivet $p_1, \ldots, p_n \vDash q$), q är en **logisk följd** (eller en semantisk följd) av $\{p_1, \ldots, p_n\}$, betyder att q är **sann i alla modeller för** $\{p_1, \ldots, p_n\}$ (dvs tolkningar som gör alla $p_1, \ldots, p_n$ sanna).

Så $p_1, \ldots, p_n \vDash q \Leftrightarrow$ **ingen tolkning** gör $p_1, \ldots, p_n$ sanna och q falsk.

$\vDash p$ betyder $\varnothing \vDash p$, dvs att p är **logiskt giltig**, en **tautologi**,
dvs **sann i alla tolkningar** (så t.ex. är det sant att $\vDash A \vee \neg A$).

Lite om bevis

Naturlig deduktion är en form av formellt bevis, som efterliknar resonemangen i informella (men strikta) bevis. Den är **syntaktisk** i meningen att reglerna bara handlar om hur sentenserna (som står för påståenden) ser ut, **inte** vad de betyder. Det gör det enkelt att kontrollera om ett resonemang är riktigt.
Ex. För att visa $A \to B,\ B \to \neg A \ \vdash\ \neg A$ (dvs härleda $\neg A$ från $A \to B$ och $B \to \neg A$):

1	(1)	$A \to B$	premiss
2	(2)	$B \to \neg A$	premiss
3	(3)	A	antagande
1,3	(4)	B	1,3 $\to$E
1,2,3	(5)	$\neg A$	2,4 $\to$E
1,2,3	(6)	$\perp$	5,3 $\neg$E
1,2	(7)	$\neg A$	3,6 $\neg$I

Sats (Gödels fullständighetssats): Om Γ är en sentensmängd, p en sentens,

$$\boldsymbol{\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \Gamma \vdash p.}$$

Lite mängdlära

Vi kan tänka på **mängder** som ”påsar” med ”saker” (eller pekare till saker) i. ”Sakerna” (som också kan vara mängder) kallas mängdens **element**.
Två mängder är lika precis om de innehåller samma element.
$\{\pi, \sqrt{2}\}$ är mängden med elementen π och $\sqrt{2}$.
$\boldsymbol{\{x \mid Px\}}$ är mängden av x med egenskapen P, ex. $\{n \mid n \text{ heltal}, n^2 \equiv_5 2\}$.
Den tomma mängden $\varnothing = \{x \mid x \neq x\} = \{\}$, ”en tom påse”.
Obs att $\{\varnothing\}$, med ett element ($\varnothing$), inte är samma mängd som $\varnothing$, utan element.
Universum $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, den grundmängd vi sysslar med.

Standardbeteckningar för olika talmängder: $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_m$.

Viktiga relationer och operationer på mängder:

$a \in A$	a är ett **element** i A ($a \notin A$: a är **inte** ett element i A)
$B \subseteq A$	B är en **delmängd** till A, dvs $x \in B \Rightarrow x \in A$, för alla x
$B \subset A$	B är en **äkta** delmängd till A, dvs $B \subseteq A$ och $B \neq A$
$\lvert A\rvert$	antalet element i A, A:s **kardinalitet**
$A \cup B$	**unionen** av A och B, $\{x \mid \text{minst en av } x \in A, x \in B\}$
$A \cap B$	**snittet**, ä.k. **skärningen**, av A och B, $\{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$
$A \setminus B$	**differensen** mellan A och B, $\{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$
A^c	**komplementet** till A, $\mathcal{U} \setminus A$
$\mathcal{P}(A)$	A:s **potensmängd**, mängden av delmängder till A, $\{B \mid B \subseteq A\}$

Det gäller alltid, mer om det senare, $\boldsymbol{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.}$

Räkneregler för $\cup, \cap, {}^c, \varnothing, \mathcal{U}$ (enligt sidan 20 i boken) gäller också för $\vee, \wedge, \neg, \bot, \top$.
Venn-diagram (viktiga, men svåra att rita här) kan användas för att visa mängdreglerna.
'$p \equiv q$' betyder att p och q är **logiskt ekvivalenta**, dvs har samma sanningsvärde i alla tolkningar. $\top$ (kallad 'verum') är alltid sann, $\top \equiv \neg\bot$.

Boolesk algebra

Mängdoperationer

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	kommutativitet
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	associativitet
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivitet
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	DeMorgan
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	idempotens
$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	absorption
$(A^c)^c = A$		involution
$A \setminus B = A \cap B^c$		$\setminus$ uttryckt
$A \cap A^c = \varnothing$	$A \cup A^c = \mathcal{U}$	komplementaritet
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	
$A \cap \mathcal{U} = A$	$A \cup \varnothing = A$	

Logiska ekvivalenser

$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$	kommutativitet
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	associativitet
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributivitet
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	DeMorgan
$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$	idempotens
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	absorption
$\neg\neg p \equiv p$		involution
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$		$\leftrightarrow$ uttryckt
$p \to q \equiv \neg p \vee q$		$\to$ uttryckt
$\neg p \equiv p \to \bot$		$\neg$ uttryckt
$p \wedge \neg p \equiv \bot$	$p \vee \neg p \equiv \top$	komplementaritet
$p \wedge \bot \equiv \bot$	$p \vee \top \equiv \top$	
$p \wedge \top \equiv p$	$p \vee \bot \equiv p$	

Abstrakt

(Oftast skrivs xy för $x \cdot y$ etc.)

$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$	kommutativitet
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$	associativitet
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	distributivitet
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	DeMorgan
$x \cdot x = x$	$x + x = x$	idempotens
$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$	absorption
$\overline{\overline{x}} = x$		involution
$x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$	$x + \overline{x} = \mathbf{1}$	komplementaritet
$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	$x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$	
$x \cdot \mathbf{1} = x$	$x + \mathbf{0} = x$	