

Några problem som repetition (de inom [] hanns inte med på föreläsningen):

1. På hur många sätt kan fem byar förenas med vägar så att ingen by är isolerad?

Dvs hur många olika grafer med fem (särskiljbara) hörn och inget isolerat hörn finns det?

Principen om inklusion och exklusion ger det sökta antalet som

$$2^{\binom{5}{2}} - 5 \cdot 2^{\binom{4}{2}} + \binom{5}{2} 2^{\binom{3}{2}} - \dots = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} 2^{\binom{5-k}{2}} = 2^{10} - 5 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^0 - 1 \cdot 2^0 = 768.$$

2. Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ så att $p(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{125}$.

Idé: $\equiv_{5^i} \Rightarrow \equiv_{5^j}$ om $i \geq j$, så börja $\pmod{5}$ och finn $x = \pm 1 + 5k$, använd i ekv $\pmod{25}$ och få $x = -6 + 25l$ etc.

Svaret blir: **alla $x \equiv 94 \pmod{125}$** .

[3.] Låt grafen G ha det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$. På hur många sätt kan G hörnfärgas med **exakt** λ färger, dvs så att varje färg används?

Kalla (tillfälligt) det sökta antalet $Q_G(\lambda)$. Svaret är

$$Q_G(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \binom{\lambda}{j} P_G(\lambda - j) = \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} \binom{\lambda}{r} P_G(r),$$

vilket visas med principen om inklusion och exklusion.

Alternativt, från (den enklare) $P_G(\lambda) = \sum_{r=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{r} Q_G(r)$ med

binomialinversion för talföljder $(a_0, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_n)$,

$$b_k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a_r, \quad k = 0, \dots, n \Leftrightarrow a_k = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} b_r, \quad k = 0, \dots, n.$$

4. Låt p och q vara primtal så att $q \mid 2^p - 1$. Visa att $q > p$.

$2^p = 1$ i $\mathbb{Z}_q$, så $o(2) = p$ (p primtal ju) i $(\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}, \cdot)$, av ordning $q - 1$.

Man får **$p \mid (q - 1)$** , speciellt $q > p$.

[5.] Visa att det finns ett $r \in \mathbb{Z}_+$ så att $4711 \mid \underbrace{731731 \dots 731}_{r \text{ st } 731}$.

Postfacksprincipen på 0, 731, 731731, $\dots \pmod{4711}$ (4712 st).

Använd att $\text{sgd}(4711, 10) = 1$.

6. Visa att grafen $G = (V, E)$, valenser $\delta(v)$ för $v \in V$, har minst $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1}$ oberoende hörn (dvs sådana att inga av dem är grannar).

Induktion över antalet hörn, $|V|$, i G .

I steget, tag först $v_0 \in V$ med $\delta(v_0)$ minimal och $V' = V \setminus V_0$, där $V_0 = \{v_0\} \cup \{v \in V \mid \{v_0, v\} \in E\}$ (v_0 och dess grannar).

Då är $\sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq (\delta(v_0) + 1) \frac{1}{\delta(v_0)+1} = 1$ och $\sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \geq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1}$, där $\delta'(v)$ är $v \in V'$:s valens som hörn i $G' = (V', E')$ ($E' = \{e \in E \mid e \subseteq V'\}$).

I G' finns n oberoende hörn, $n \geq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1}$ (induktion).

$$\begin{aligned} \text{Med } v_0 \text{ blir de } n+1 \text{ st oberoende hörn i } G \text{ och } \sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} &= \\ &= \sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq 1 + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1} \leq 1 + n. \end{aligned}$$

[7.] Tårtan (= ex 13**, övn 6).

Det är nog roligast att klura ut lösningen själv, men om $n = 6$ blir den brun igen första gången efter 84 vändningar.

8a. Visa att om de 52 korten i en kortlek delas upp i 13 högar med 4 kort i varje, är det möjligt att välja ett kort ur varje hög så att det blir precis ett kort av varje valör.

[b.] Visa att man kan dra ett kort slumpmässigt ur en av högarna och komplettera med ett kort var ur de övriga högarna, så att det ändå blir 13 olika valörer.

Halls sats på $G = (X \cup Y, E)$ med $X = \{\text{högarna}\}$, $Y = \{\text{valörerna}\}$ och kanter från varje hög till dess ingående valörer.

I b. betraktas grafen av de återstående 12 högarna och 12 valörerna.

k st av de högarna innehåller minst k av de valörerna (högst 3 kort av den redan dragna valören).

9. Namnen i lådorna (= ex 6**, övn 8).

Fundera själv, men det har med permutationer och deras cykelstruktur att göra.

[10.] Hur många väsentligt olika färgningar med högst k färger av **kanterna** i en ikosaeder finns det?

Som det andra exemplet på sid. 7 i bladen om gruppverkan, men med kanter. Svaret blir $\frac{1}{60}(k^{30} + 15k^{16} + 20k^{10} + 24k^6)$.

För $k = 2$ blir det 17 912 448 olika färgningar.

[11.] Biplatserna (= ex 6**, övn 7).

Vilka platser kan vara lediga? Vilken av dem är mest sannolik?

Svaren är $\frac{1}{2}$ och $\frac{k}{k+1}$.

12. Kortkonsten (= ex 14**, övn 12).

Avslöjas inte här, men postfacksprincipen, modulär aritmetik och permutationer kommer in.