

(SF1662 Diskret matte, vt15: F24, ti 12 maj 2015)

Antalet sätt att hörnfärga grafen $G = (V, E)$ med (högst) λ färger ges av det **kromatiska polynomet** $P_G(\lambda)$.

Det kromatiska talet $\chi(G)$ är det **minsta** $\lambda \in \mathbb{N}$ med $P_G(\lambda) \neq 0$.

$P_G(\lambda)$ är, som namnet antyder, ett polynom.

- Dess högstegradsterm är $\lambda^{|V|}$.
- Nästhögstegradstermen är $-|E|\lambda^{|V|-1}$.
- Koefficienterna är alternerande ≥ 0 och ≤ 0 .
- Konstanttermen är 0 (om $|V| > 0$).

Ex. För ett träd T_n med n hörn är

$$P_{T_n} = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

För den fullständiga grafen K_n med n hörn är

$$P_{K_n} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - (n - 1)).$$

Rekursionsformel:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda),$$

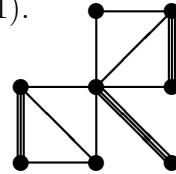
där $G - e$ är grafen G med kanten e borttagen och G/e är G med kanten e kontraherad (dvs hörnen i e :s ändar sammanslagna).

Med hjälp av rekursionsformeln visas egenskaperna ovan och man finner för den cykliska grafen C_n

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

En **matchning** M för grafen $G = (V, E)$:

$M \subseteq E$, kanterna i M parvis disjunkta



Fullständig matchning: varje hörn i G ingår i någon kant i M

(om $G = (X \cup Y, E)$ är bipartit kräver vi bara $|M| = |X|$,

dvs att alla hörn i X är matchade)

Maximal matchning: så många av G :s hörn som möjligt ingår,

dvs $|M|$ är maximal

Halls sats (giftermålssatsen):

En bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ har en fullständig matchning

omm $|P(A)| \geq |A|$, alla $A \subseteq X$

där $P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$

Visades med (induktion över $|M|$ och) **utökande alternerande stigar**, stigar som börjar och slutar i omatchade hörn och där varannan kant tillhör M (och varannan inte).

Transversaler

Om $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ är en uppsättning mängder, kallas en motsvarande uppsättning $\{m_i\}_{i \in I}$ med $m_i \in M_i$ för alla $i \in I$ och $m_i \neq m_j$ om $i \neq j$ för en **transversal** (i boken kallad "system av distinkta representanter") för $\mathcal{M}$.

Halls sats handlade ursprungligen om transversaler och säger att om I är ändlig (eller I oändlig, men alla M_i ändliga) har $\mathcal{M}$ en transversal omm

$$|\bigcup_{i \in A} M_i| \geq |A| \text{ för alla (ändliga) } A \subseteq I.$$

(Ses genom att betrakta den bipartita grafen med $X = I$, $Y = \bigcup_{i \in I} M_i$ och kanter precis mellan varje $i \in I$ och alla element i M_i och använda giftermålssatsen.)