

(SF1662 Diskret matte, vt15: F22, to 7 maj 2015)

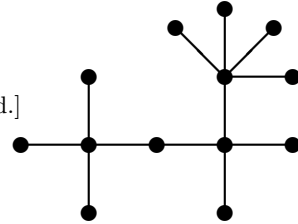
Ett **träd** $T = (V, E)$ är en **sammanhängande** graf **utan** cykler.

I ett träd:

- $x, y \in V \Rightarrow$ det finns en **unik stig** från x till y i T

[Detta kan användas som en alternativ **definition** av ett träd.]

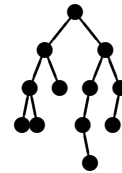
- om en kant i E tas bort, återstår två träd
- $|E| = |V| - 1$ (om $V \neq \emptyset$)



För varje sammanhängande graf $G = (V, E)$ finns ett **spännande träd**,
dvs ett träd $T = (V, E')$ med $E' \subseteq E$.

Binära rotade träd

har ett hörn som utsetts till **rot** och i varje hörn finns plats för ett "vänsterbarn" och ett "högerbarn". De används särskilt för **sökning** och **lagring** med ordnade data.



Planära grafer

En **plan graf**: En "konkret graf" i planet vars kanter inte korsar varandra

En **planär graf**: En graf som är isomorf med en plan graf,
dvs den **kan ritas** i planet utan att kanter korsas

Sats: (Eulers polyederformel): Om en sammanhängande plan graf har v hörn, e kanter och r ytor gäller

$$v - e + r = 2$$

Allmänne: Om grafen har c komponenter gäller

$$v - e + r - c = 1$$

Eulers polyederformel ger (eftersom varje yta om $e \geq 2$ har minst 3 kanter)

Sats: För en sammanhängande planär graf med $e \geq 2$ gäller $3v \geq e + 6$
Om grafen också är bipartit gäller $2v \geq e + 4$

De fullständiga graferna K_n , $n \geq 5$ och $K_{p,q}$, $p, q \geq 3$ är **inte planära**

Att en graf är icke-planär "beror" alltid på att den "innehåller" K_5 eller $K_{3,3}$:

Kuratowskis sats: Grafen G är icke-planär **om** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från G med en följd (0 eller fler) av operationerna:

- ta bort ett hörn (och dess kanter)
- ta bort en kant
- "sudda ut" ett hörn med valens 2 (bevara en kant mellan dess grannar)

Wagners sats: Grafen G är icke-planär **om** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från G med en följd (0 eller fler) av operationerna:

- ta bort ett hörn (och dess kanter)
- ta bort en kant
- kontrahera en kant ("dra ihop" hörnen vid kanten till ett nytt hörn)

(Villkoret i Wagners sats kallas att K_5 eller $K_{3,3}$ är en **minor** till G . I DMF7.1 definieras "minor" på ett annat (ovanligt) sätt.)