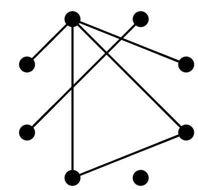
(SF1662 Diskret matte, vt15: F21, on 6 maj 2015)

Grafteori, inledning



En **graf** $G = (V, E)$:

V en ändlig mängd, **hörnen** (eller **noderna**)
E en mängd 2-delmängder till V, **kanterna**

$x, y \in V$ sägs vara **grannar** i grafen om $\{x, y\} \in E$.

I en **grannlista** (eng. adjacency list) för G anges för varje hörn vilka dess grannar är. Den beskriver grafen fullständigt.

Det gör också **grannmatrisen** (typ $|V|\times|V|$), med element $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

och **incidensmatrisen**, med $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } v_i \in e_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ (så matrisen är av typ $|V| \times |E|$).

Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** (”strukturlika”) omm det finns

en **bijektion** $\phi : V_1 \to V_2$, så att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$

Valensen (eller **graden**) för ett hörn v: $\delta(v) =$ antalet grannar till v.

G är **reguljär** om alla valenser är lika.

Sats: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$

Följdsats: Antalet **udda hörn** (dvs hörn med udda valens) är **jämnt**.

Benämningar (inte helt standardiserade) för hörnföljder i en graf $G = (V, E)$:

En **vandring**: $v_1 v_2 \ldots v_k$, där $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för $i = 1 \ldots k - 1$.

En **väg**: en vandring som inte passerar någon kant mer än en gång.

En **krets**: en sluten väg, dvs en väg som börjar och slutar i samma hörn.

En **stig**: en väg som inte passerar något hörn mer än en gång.

En **cykel**: en sluten stig, dvs en krets där inget hörn passeras mer än en gång.

Grafen G är **sammanhängande** om två godtyckliga hörn kan förbindas med en vandring/väg/stig.

En **komponent** av grafen: en maximal sammanhängande del.

Intressanta:

En **eulerväg**: en väg som passerar varje kant i E exakt en gång.
En **eulerkrets**: en krets som passerar varje kant i E exakt en gång.

Sats (Euler):
G har en eulerväg (eulerkrets) $\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ är } \textbf{sammanhängande} \text{ (+ ev. lösa hörn),} \\ G \text{ har } \textbf{högst två} \text{ (resp. } \textbf{inget}\text{) } \textbf{udda hörn}. \end{cases}$

En **hamiltonstig**: en stig som går genom alla hörn i V.
En **hamiltoncykel**: en cykel som går genom alla hörn i V.

Det är **mycket svårare** att avgöra om en (stor) graf har en hamiltonstig/cykel än om den har en eulerväg/krets.

En graf sägs vara **eulersk**, en **eulergraf**, omm den har en eulerkrets och den kallas **hamiltonsk**, en **hamiltongraf**, omm den har en hamiltoncykel.