

(SF1662 Diskret matte, vt15: F14, to 5 mars 2015)

Om konjugerade permutationer

Permutationer $\alpha, \beta \in S_n$ kallas **konjugerade** om $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$. Detta definierar en **ekvivalensrelation** på S_n .

Sats: α och β är konjugerade om de har **samma cykelstruktur** (är av samma typ), dvs har lika många i -cykler (alla i).

σ är då en permutation som tar α 's cykler till β 's, dvs om α har en cykel $(x_1 x_2 \dots x_k)$ har $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ en cykel $(\sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_k))$.

Ekvivalensklasser av konjugerade permutationer i S_n motsvarar således bijectivt **partitioner av n** , $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}]$, där $n = 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + k \cdot \alpha_k$.

Om udda och jämna permutationer

En **transposition** är en permutation av typ $[1^{n-2} 2]$, dvs $\tau = (ab) \in S_n$, $a \neq b$.

Varje permutation kan skrivas som en produkt av transpositioner, dvs för alla $\pi \in S_n$ finns transpositioner τ_i så att $\pi = \tau_r \dots \tau_2 \tau_1$ för något r .

Sats: Om $\pi = \tau_r \dots \tau_2 \tau_1 = \tau'_{r'} \dots \tau'_2 \tau'_1$ har r och r' samma paritet, dvs de är båda jämna eller båda udda.

Det minsta möjliga r -värdet är $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i π (alla 1-cykler medräknade).

Definition: π är en **jämn(/udda) permutation** om r är jämnt(/udda).

Tecknet (signum) för π , $\text{sgn } \pi = (-1)^r = \begin{cases} +1 & \pi \text{ jämn} \\ -1 & \pi \text{ udda} \end{cases}$

Det uppfyller

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\pi\sigma) &= \text{sgn } \pi \text{sgn } \sigma \\ \text{sgn } \pi^{-1} &= \text{sgn } \pi \\ \text{sgn}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) &= \text{sgn } \alpha\end{aligned}$$

Om π är av typ $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}]$ (dvs innehåller α_i st i -cykler) är

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots} = (-1)^{n - c(\pi)}.$$

En **cykel** är en **jämn** permutation om den har **udda** längd(!).

En **jämn permutation** är en med ett **jämnt antal** cykler av **jämn längd**.

I S_n ($n \geq 2$) är **hälften** av elementen **jämna** och **hälften udda** permutationer.