

(SF1662 Diskret matte, vt15: F13, on 4 mars 2015)

En **partition av ett naturligt tal n** (inte detsamma som en partition av en mängd):

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$$

Kan ses som en partition av n st **identiska** (inte särskiljbara) objekt.

Ett exempel på samband mellan antalen partitioner av olika slag:

Antalet partitioner av n i högst m delar =

antalet partitioner av n i delar som alla är $\leq m$.

(I kapitel 6 i DMF står mycket mer om partitioner, bl.a. (det eleganta) beviset för detta (s. 139), men det kapitlet ingår inte i vår kurs.)

Permutationer

En permutation (av mängden X) är en bijektion $\pi : X \rightarrow X$

$S_n : \{\text{alla permutationer av } [n] = \{1, 2, \dots, n\}\}, \quad |S_n| = n!$

För $\pi, \sigma \in S_n$ definierar vi **produkten $\pi\sigma$** som sammansättningen av funktionerna π och σ (där, som vanligt, σ verkar före π).

För alla $\pi, \sigma, \tau \in S_n$ gäller då

$$\begin{cases} \pi\sigma \in S_n, & \text{slutenhet} \\ \pi(\sigma\tau) = (\pi\sigma)\tau, & \text{associativitet} \\ \text{det finns ett } id \in S_n \text{ så att } \pi id = id \pi = \pi, & \text{identitetsselement} \\ \text{det finns ett } \pi^{-1} \in S_n \text{ så att } \pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = id, & \text{invers} \end{cases}$$

id är identitetsfunktionen på $[n]$, $id(i) = i$ för alla $i \in [n]$.

π^{-1} är inversfunktionen till π .

Beteckningar för π :

Tvåradnotation: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ l & \dots & \dots & j & \dots & i & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Enradnotation: $[l \dots \dots j \dots i \dots \dots \dots \dots]$

Cykelnotation: $(1 l \dots)(i j \dots k) \dots$

Då $\pi(1) = l, \dots, \pi(i) = j, \dots, \pi(k) = i, \dots$ (och 1 och i ligger i olika cykler).

Ordningen $o(\pi)$ för permutationen $\pi \in S_n$ definieras som det minsta $m \in \mathbb{Z}_+$ så att $\pi^m = id$.

$\pi^m = id$ om och endast om alla π :s cykellängder är delare till m (eftersom alla cykler i π måste "snurra" ett helt antal varv), så $o(\pi)$ är **minsta gemensamma multipeln** för cykellängderna i π .