(SF1662 Diskret matte, vt15: F12, on 25 feb 2015)

Principen om inklusion och exklusion (sållprincipen)

$$|\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{i+1}} \boldsymbol{\alpha_i}$$

$$\text{där} \quad \alpha_i = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_i \le n} |A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}|.$$

ex. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$

$$= \underbrace{(|A_1| + |A_2| + |A_3|)}_{\alpha_1} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_2} + \underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{\alpha_3}$$

Som ett exempel visade vi att andelen av alla permutationer f av en n-mängd som för alla x uppfyller $f(x) \neq x$ är

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k!}} \left(= \frac{1}{e} + \frac{(-1)^n e^{\xi_n}}{(n+1)!}, \quad \text{för något } \xi_n, \ -1 < \xi_n < 0 \right).$$

"Sannolikheten att ingen får sin egen hatt om n hattar fördelas på måfå (dvs likafördelat) bland ägarna är nära $\frac{1}{e}$ (nästan oberoende av n (inte för litet))."

Stirlingtalen (av andra slaget) $\boldsymbol{S(n,k)}$: **antalet partitioner** (uppdelningar) av en n-mängd i precis k (icke-tomma) delar.

$$\text{Rekursivt:} \begin{cases} S(n,1) = S(n,n) = 1, & n = 1, 2, \ldots \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), & 1 < k < n \end{cases}$$

"Stirlings triangel":

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & \\
 & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 & \\
1 & & 63 & & 301 & & 350 & & 140 & & 21 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Om $|X| = n$ och $|Y| = k$ är antalet **surjektioner** $\boldsymbol{f : X \to Y}$

$$k! \, S(n,k)$$

Antalet **ekvivalensrelationer** på X = antalet **partitioner** av X =

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k), \quad (|X| = n)$$

Men varför är

$$k^n = \sum_{i=1}^{\min(k,n)} S(n,i)(k)_i \ ?$$