(SF1662 Diskret matte, vt15: F10, to 19 feb 2015)

Ordnat urval med eller utan upprepning ("återläggning")

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = m, |Y| = n$:

Sats: Antalet **funktioner** $f : X \to Y$
= antalet element i $Y^m = Y \times Y \times \cdots \times Y$ (m st)
= antalet ord av längd m i Y
= antalet **ordnade val med upprepning (tillåten)** av m st ur Y
$= \boldsymbol{n^m = |Y|^{|X|}}$

Sats: Antalet **injektioner** $f : X \to Y$
= antalet ord av längd m i Y utan upprepning
= antalet **ordnade val utan upprepning** av m st ur Y
$= \boldsymbol{n(n-1)\dots(n-m+1) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}}$

Följdsats: Antalet **bijektioner** $f : X \to Y$

$$= \begin{cases} n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1 & \text{om } |X| = |Y| \quad \text{(Specialfall av föregående)} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Oordnat urval utan upprepning

Antalet k-delmängder till en n-mängd =
= antalet **oordnade** val av k st från en n-mängd, **utan upprepning** =
= **binomialtalet** $\binom{n}{k}$, läses "n över k" (eng. "n choose k")

Rekursivt:

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, & k, n \in \mathbb{N},\ 0 < k < n \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Sats: $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Binomialsatsen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(Kommer nästa gång:)
Multinomialtal: $$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \qquad (k_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n)$$

= antalet sätt fördela n (olika) element i m (olika) lådor, med k_i st i låda i
= antalet sätt att **ordna** en **multimängd** som har k_i exemplar av element i
= antalet funktioner $f : [n] \to [m]$ som antar värdet i precis k_i gånger,
(där $[r] = \{1, 2, \dots, r\}$)

Multinomialsatsen:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{\sum k_i = n \\ k_i \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$