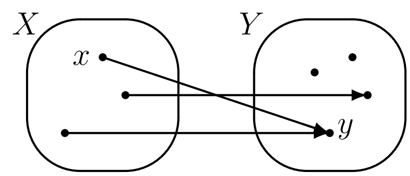
Funktioner, avbildningar



$$f : X \to Y, \qquad y = f(x)$$

Sammansättning av funktioner

$$f : X \to Y,\ g : Y \to Z \ \text{ ger } gf : X \to Z,\ (gf)(x) = g(f(x))$$

En funktion $f : X \to Y$ kan **definieras** som en delmängd $f \subseteq X \times Y$ med

- $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$
- För alla $x \in X$ finns $y \in Y$ med $(x, y) \in f$

$f : X \to Y$ är en

injektion omm $y = f(x)$ har **högst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$
(dvs omm varje $y \in Y$ antas högst en gång som värde för f,
dvs omm $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

surjektion omm $y = f(x)$ har **minst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$
(dvs omm varje $y \in Y$ antas minst en gång som värde för f)

bijektion omm $y = f(x)$ har **exakt en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$
(dvs omm varje $y \in Y$ antas exakt en gång som värde för f)

Sats: Sammansättning av två $\boldsymbol{\alpha}$jektioner ger en $\boldsymbol{\alpha}$jektion ($\boldsymbol{\alpha} = in, sur, bi$).

$g : Y \to X$ är en **inversfunktion** f^{-1} till $f : X \to Y$ omm $fg = id_Y, gf = id_X$,
där id_X är identitetsfunktionen på X, $id_X(x) = x$ för alla $x \in X$.
(f^{-1} är f med ”pilarna vända”.)

Sats: $f : X \to Y$ är inverterbar (har en inversfunktion) omm f är en bijektion
f^{-1} är då också en bijektion och $(f^{-1})^{-1} = f$.

Definition: Mängderna X och Y har **samma kardinalitet**, $|\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{Y}|$,
omm det finns en **bijektion** $\boldsymbol{f : X \to Y}$.

X:s kardinalitet $|X|$ är entydig.

Att mängden X har n element, $|X| = n$, betyder att det finns en bijektion

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X.$$

X är **uppräknelig**(t oändlig) betyder att det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \to X$.

$\mathbb{Q}$, (mängden av) de rationella talen, är **uppräknelig**.

$\mathbb{R}$, de reella talen, är **oändlig** men **inte uppräknelig** (överuppräknelig).

Hanns inte på föreläsningen, kommer kort nästa:

Sats: (Cantor) Om X är en (ändlig eller oändlig) mängd:

$$|\boldsymbol{X}| < |\boldsymbol{\mathcal{P}(X)}|,$$

där $\mathcal{P}(X)$ är X:s potensmängd.

(Dvs det finns en injektion men ingen surjektion $X \to \mathcal{P}(X)$.)