

(SF1662 Diskret matte, vt15: F5, må 2 feb 2015)

Induktion och rekursion

Bevis med induktion, för påståenden om naturliga tal:

Om för påståendet $P(n)$ en av följande gäller för alla $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} i) & P(0) & (\text{bas}) \\ ii) & P(k) \Rightarrow P(k+1) & (\text{steg}) \end{cases} \quad \text{eller} \quad (P(m) \text{ för alla } m < k) \Rightarrow P(k)$$

så är $P(n)$ sann för alla $n = 0, 1, \dots$

Definition med rekursion, av talföljder:

Villkoret att en av följande gäller för alla $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} i) & u_0 = c & (\text{bas}) \\ ii) & u_{k+1} = \phi(u_k, k) & (\text{steg}) \end{cases} \quad \text{eller} \quad u_k = \Phi(\{u_i\}_{i=0}^{k-1}, k)$$

(med c ett givet tal och ϕ, Φ givna funktioner)

definierar u_n entydigt för alla $n = 0, 1, \dots$

Egenskaper för rekursivt definierade följder kan bevisas med induktion.

Den väsentliga egenskapen hos de naturliga talen som gör induktionsbevis och rekursiva definitioner möjliga är att de är **välordnade**, dvs de är ordnade (av $<$) så att varje icke-tom mängd naturliga tal har ett **minimalt element**.

(Man kan t.ex. inte bevisa egenskaper för de positiva rationella talen med induktion, de är ordnade men inte välordnade (det finns t.ex. inget minsta rationellt tal som är > 1 .)

Vi definierade **fibonaccitalen** F_n : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ rekursivt enligt

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Med induktion kan man visa att $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ för $n = 0, 1, \dots$

Lite om bevis

Materialet om bevis (på kurssidan under "Kurslitteratur") är avsett som orientering om grundläggande begrepp i matematisk logik.

Viktigast för oss (i denna kurs) är att förstå "sentenserna" och kunna formulera enkla bevis med **naturlig deduktion** (med reglerna givna, man behöver inte kunna dem "utantill"). Vi håller oss mest till **satslogik**.

Sentenser byggs i satslogiken upp av **atomära** sentenser och **konnektiv** (och parenteser).

En sentens är en **symbolsträng** som kan stå för olika utsagor (påståenden). Olika språkliga (t.ex. svenska) uttryck kan också motsvara samma sentens.

Ex. Om de atomära sentenserna A och B står för

'Det är lördag' respektive 'Lisa läser diskret matte' motsvarar

'Lisa läser diskret matte om det är lördag' och

'Det är lördag bara om Lisa läser diskret matte' (betyder detsamma)

båda sentensen $A \rightarrow B$, uppbyggd av A, B och konnektivet $\rightarrow$.

Andra konnektiv: $\neg$ 'inte' ($\neg A$: 'det är inte lördag')

$\wedge$ 'och', 'men' ($A \wedge B$: 'det är lördag och L. läser d.m.'), $\vee$ 'eller' (eller båda)

$\leftrightarrow$ 'om och endast om'