

(SF1662 Diskret matte, vt15: F1, on 21 jan 2015)

Vi inledde kursen med några egenskaper för heltalen, $\mathbb{Z}$.

Sats (division med rest): Om p, d är heltal, $d \neq 0$, finns entydiga heltal q, r med

$$p = qd + r \text{ och } 0 \leq r < |d|.$$

Talet q kallas **kvoten** av p och d , r kallas (den principala) **resten**.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Beviset för satsen presenterades kortfattat på föreläsningen.} \\ r \text{ är det minsta talet som är } \geq 0 \text{ och kan skrivas } p - ad, a \text{ heltal.} \\ (\text{Det finns säkert ett minsta element i en icke-tom mängd naturliga tal.}) \\ q \text{ är motsvarande } a, \text{ så } p = qd + r \text{ och } r \geq 0. \\ \text{Om } r \geq |d| \text{ vore } r - |d| \geq 0, \text{ vilket skulle motsäga definitionen av } r \text{ som minst.} \\ \text{Om också } p = q'd + r' \text{ och } 0 \leq r' < |d| \text{ fås } (q - q')d = r' - r. \text{ } -|d| < r' - r < |d| \text{ ger} \\ -1 < q - q' < 1, \text{ så } q = q' \text{ och därmed } r = r', \text{ vilket visar entydigheten.} \end{array} \right]$$

Om **talbaser**, att skriva ett naturligt tal i bas t , där $t \geq 2$:

Satsen ovan ger att vi för ett godtyckligt naturligt tal x får

$$\left\{ \begin{array}{ll} x &= q_0 t + r_0 \\ q_0 &= q_1 t + r_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_{n-2} &= q_{n-1} t + r_{n-1} \\ q_{n-1} &= q_n t + r_n, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq r_i < t \\ \\ \\ q_n = 0 \text{ (gäller för något } n \text{ ty } x > q_0 > \dots \geq 0) \end{array}$$

och därur

$$\begin{aligned} x &= ((\dots((r_n t + r_{n-1})t + r_{n-2})t + \dots + r_2)t + r_1)t + r_0 \\ &= r_n t^n + r_{n-1} t^{n-1} + \dots + r_2 t^2 + r_1 t + r_0, \end{aligned}$$

dvs x uttryckt i bas t är $x = (r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1 r_0)_t$.

Som exempel fann vi att $2015 = (11111011111)_2$, talet 2015 i **binär form**.

$t = 16$ ger **hexadecimal form** och $t = 8$ ger **oktal form**.

Omvandling från binär till hexadecimal eller oktal form är särskilt enkel,

$$\text{ex. } 2015 = (11111011111)_2 = (111)_2 \cdot 16^2 + (1101)_2 \cdot 16 + (1111)_2 = (7DF)_{16}.$$

$$2015 = (11111011111)_2 = (11)_2 \cdot 8^3 + (111)_2 \cdot 8^2 + (011)_2 \cdot 8 + (111)_2 = (3737)_8.$$

Att fundera på: Kan man ha $t < -1$ (med siffror bland $0, 1, \dots, |t| - 1$)?