

Några problem som repetition (inte alla hanns med på föreläsningen):
Vissa av exemplen är **-märkta uppgifter från övningar.

1. På hur många sätt kan fem byar förenas med vägar så att ingen by är isolerad?

Dvs hur många olika grafer med fem (särskiljbara) hörn och inget isolerat hörn finns det?

Inklusion och exklusion ger svaret **768** ($= \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} 2^{\binom{5-k}{2}}$).

2. Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ så att $p(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{125}$.

Idé: $\equiv_{5^i} \Rightarrow \equiv_{5^j}$ om $i \geq j$, så börja $\pmod{5}$ och finn $x = \pm 1 + 5k$, använd i ekv $\pmod{25}$ och få $x = -6 + 25l$ etc. Svaret blir: **alla $x \equiv 94 \pmod{125}$** .

3. Låt grafen G ha det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$. På hur många sätt kan G hörnfärgas med **exakt** λ färger, dvs så att varje färg används?

Kalla (tillfälligt) det sökta antalet $Q_G(\lambda)$. Svaret är

$$Q_G(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \binom{\lambda}{j} P_G(\lambda - j) = \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} \binom{\lambda}{r} P_G(r),$$

vilket vi visade med principen om inklusion och exklusion.

Alternativt, från (den enklare) $P_G(\lambda) = \sum_{r=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{r} Q_G(r)$ med

binomialinversion för talföljder $(a_0, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_n)$,

$$b_k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a_r, \quad k = 0, \dots, n \Leftrightarrow a_k = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} b_r, \quad k = 0, \dots, n.$$

4. Låt p och q vara primtal så att $q \mid 2^p - 1$. Visa att $q > p$.

$2^p = 1$ i $\mathbb{Z}_q$, så $o(2) = p$ (p primtal ju) i $(\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}, \cdot)$, av ordning $q - 1$.

Man får **$p \mid (q - 1)$** , speciellt $q > p$.

5. Visa att det finns ett $r \in \mathbb{Z}_+$ så att $2001 \mid \underbrace{652652 \dots 652}_{r \text{ st } 652}$.

Postfacksprincipen.

6. Av en cirkulär tårta, med brun ovansida och vit undersida, skärs bitar med medelpunktsvinkel x intill varandra. Då en bit skurits, vänds den genast upp och ner och läggs in på sin gamla plats (och växer fast igen). Detta upprepas runt, runt tårtan.

Låt $nx < 2\pi < (n+1)x$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

- a. Blir tårtan någon gång helt vit? Efter hur många vändningar?

- b. Blir tårtan helt brun igen? Efter hur många vändningar?

Det är nog roligast att klura ut lösningen själv, men om $n = 6$ blir den brun igen första gången efter 84 vändningar.

7. Hur många väsentligt olika färgningar med högst 3 färger av **hörn** i en ikosaeder finns det?

Burnsides lemma ger för λ färger antalet $\frac{1}{60}(\lambda^{12} + 15\lambda^6 + 44\lambda^4)$, dvs för $\lambda = 3$: 9099 st.

Detta är också antalet sätt att färga sidoytorna i en dodekaeder med 3 färger.

8. 100 personer har biljett till varsin av de 100 platserna i en biosalong. Den som går in först har dock tappat sin biljett och sätter sig på en slumpmässigt (likafördelat) vald plats. Var och en av de övriga sätter sig på sin egen plats om den är ledig, annars på en lika slumpmässigt vald (ledig) plats.

Vad är sannolikheten att den som kommer in sist hamnar på sin egen plats?
Att den k :e personen från slutet hamnar rätt?

$\frac{1}{2}$. De 2 möjliga stolarna är lika sannolika.

För den k :e från slutet ($1 \leq k \leq 99$) blir det på samma sätt $\frac{k}{k+1}$.

9. A och B utför en kortkonst på följande sätt. A får fem kort som slumpvis dragits ur en kortlek. Han tittar på dem och ger sedan, utan att visa det femte, fyra av dem till B. B talar då om vilket det femte kortet är.

Hur bär de sig åt?

Avslöjas inte här.