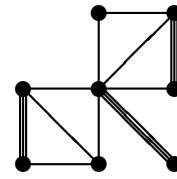


(SF1662 Diskret matte CL1, vt12: F24, må 21 maj 2012)

En **matchning**  $M$  för grafen  $G = (V, E)$ :  
 $M \subseteq E$ , kanterna i  $M$  parvis disjunkta



**Fullständig matchning**: varje hörn i  $G$  ingår i någon kant i  $M$   
(om  $G = (X \cup Y, E)$  är bipartit kräver vi bara  $|M| = |X|$ ,  
dvs att alla hörn i  $X$  är matchade)

**Maximal matchning**: så många av  $G$ 's hörn som möjligt ingår,  
dvs  $|M|$  är maximal

**Halls sats** (giftermålssatsen):

En bipartit graf  $G = (X \cup Y, E)$  har en fullständig matchning  
omm  $|P(A)| \geq |A|$ , alla  $A \subseteq X$

där  $P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$

Visades med (induktion över  $|M|$  och) **utökande alternerande stigar**, stigar  
som börjar och slutar i omatchade hörn och där varannan kant tillhör  $M$  (och  
varannan inte).

Om  $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$  är en uppsättning mängder, kallas en motsvarande uppsättning  
 $\{m_i\}_{i \in I}$  med  $m_i \in M_i$  för alla  $i \in I$  och  $m_i \neq m_j$  om  $i \neq j$  för en **transversal**  
(i boken kallad "system av distinkta representanter") för  $\mathcal{M}$ .

Halls sats handlade ursprungligen om transversaler och säger att om  $I$  är  
ändligt har  $\mathcal{M}$  en transversal omm

$$|\bigcup_{i \in A} M_i| \geq |A| \text{ för alla } A \subseteq I.$$

(Ses genom att betrakta den bipartita grafen med  $X = I$ ,  $Y = \bigcup_{i \in I} M_i$  och kanter  
precis mellan varje  $i \in I$  och alla element i  $M_i$  och använda giftermålssatsen.)

**Sats**: Om  $M$  är en maximal matchning i en bipartit graf  $G = (X \cup Y, E)$  gäller  
 $|M| = |X| - \delta(G)$ , där  $\delta(G) = \max_{A \subseteq X} (|A| - |P(A)|)$ , grafens **defekt**.

**Sats**: En matchning i en graf (den behöver inte vara bipartit) är maximal **omm**  
det inte finns någon utökande alternerande stig (dvs en alternerande stig med  
omatchade första och sista hörn) för  $M$ .

Detta ger en **algoritm** för att finna en maximal matchning i en bipartit graf:

**För varje omatchat hörn**  $x \in X$ :

Undersök alla alternerande stigar från  $x$ , tills en leder till ett omatchat  
hörn. Byt i  $M$  ut stigens  $M$ -kanter mot stigens andra kanter, få en  
matchning  $M'$  med  $|M'| = |M| + 1$ .

**Upprepa** så länge det går, dvs så länge någon alternerande stig från ett  
omatchat  $X$ -hörn leder till ett omatchat  $Y$ -hörn.