

## Planära grafer, forts.

En **regelbunden polyeder** (en platonsk kropp):

alla sidoytor regelbundna  $m$ -hörningar, alla hörn kongruenta, valens  $n$ .

Det motsvarar en "dubbelt reguljär" plan, sammanhängande graf:

alla ytor har  **$m$  kanter**, alla hörn har **valens  $n$** .

**Enda möjliga** sådana (med  $n \geq 3$ ):

| $m$ | $n$ | $v$ | $e$ | $r$ | motsvarande polyeder |
|-----|-----|-----|-----|-----|----------------------|
| 3   | 5   | 12  | 30  | 20  | ikosaeder            |
| 3   | 4   | 6   | 12  | 8   | oktaeder             |
| 3   | 3   | 4   | 6   | 4   | tetraeder            |
| 4   | 3   | 8   | 12  | 6   | hexaeder (kub)       |
| 5   | 3   | 20  | 30  | 12  | dodekaeder           |

**Duala grafen** (inte säkert en enkel graf, även om  $G$  är det)  $G^\perp$  till en plan graf  $G$ :

ett hörn i var och en av  $G$ 's ytor

en kant genom var och en av  $G$ 's kanter

Om  $G$  är (plan och) sammanhängande, är  $(G^\perp)^\perp$  isomorf med  $G$ .

$$v^\perp = r, e^\perp = e, r^\perp = v$$

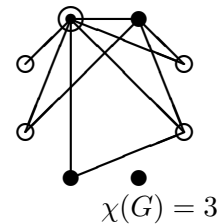
En **hörfärgning** av grafen  $G = (V, E)$ :

en funktion  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$

så att  $\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

**Kromatiska talet**  $\chi(G)$  för  $G$ :

minsta antalet färger som  $G$  kan hörfärgas med



En **girig algoritm** för att approximera  $\chi(G)$  (ger en överskattning av  $\chi(G)$ ):

1. ordna hörnen:  $v_1, v_2, \dots, v_n$

2. välj i ordning  $c(v_1), c(v_2), \dots$  minsta möjliga, givet de redan valda

**Sats:**  $G$  har maxvalens  $k \Rightarrow$

·  $\chi(G) \leq k + 1$

· om  $G$  sammanhängande och inte reguljär så  $\chi(G) \leq k$

Med Eulers polyederformel visas:

**Sats:** En planär graf har hörn med valens  $\leq 5$ .

**Fyrfärgssatsen:**  $G$  planär  $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

På föreläsningen visades (kort) sexfärgssatsen och femfärgssatsen.

Vänd!

**Antalet sätt** att hörnfärga grafen  $G = (V, E)$  med (högst)  $\lambda$  färger ges av det **kromatiska polynomet**  $P_G(\lambda)$ .

Det kromatiska talet  $\chi(G)$  är det **minsta**  $\lambda \in \mathbb{N}$  med  $P_G(\lambda) \neq 0$ .

$P_G(\lambda)$  är, som namnet antyder, ett polynom.

- Dess högstgradsterm är  $\lambda^{|V|}$ .
- Nästhögstgradstermen är  $-|E|\lambda^{|V|-1}$ .
- Koefficienterna är alternerande  $\geq 0$  och  $\leq 0$ .
- Konstanttermen är 0 (om  $|V| > 0$ ).

Ex. För ett träd  $T_n$  med  $n$  hörn är

$$P_{T_n} = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

För den fullständiga grafen  $K_n$  med  $n$  hörn är

$$P_{K_n} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - (n - 1)).$$

Rekursionsformel:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda),$$

där  $G - e$  är grafen  $G$  med kanten  $e$  borttagen och  $G/e$  är  $G$  med kanten  $e$  kontraherad (dvs hörnen i  $e$ :s ändar sammanslagna).

Med hjälp av rekursionsformeln visas egenskaperna ovan och man finner för den cykliska grafen  $C_n$

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$