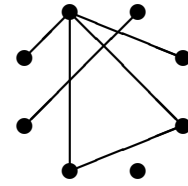


Grafteori, inledning

En **graf** $G = (V, E)$:

V en ändlig mängd, **hörnen** (eller **noderna**)

E en mängd 2-delmängder till V , **kanterna**



$x, y \in V$ sägs vara **grannar** i grafen om $\{x, y\} \in E$.

I en **grannlista** (eng. adjacency list) för G anges för varje hörn vilka dess grannar är. Den beskriver grafen fullständigt.

Det gör också **grannmatrisen** (typ $|V| \times |V|$), med element $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

och **incidensmatrisen**, med $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } v_i \in e_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ (så matrisen är av typ $|V| \times |E|$).

Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** ("strukturlika") omm det finns

en **bijektion** $\phi: V_1 \rightarrow V_2$, så att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$

Valensen (eller **graden**) för ett hörn v : $\delta(v) =$ antalet grannar till v .

G är **reguljär** om alla valenser är lika.

Sats: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$

Följdsats: Antalet **udda hörn** (dvs hörn med udda valens) är **jämnt**.

Benämningar (inte helt standardiserade) för hörnföljder i en graf $G = (V, E)$:

En **vandring**: $v_1 v_2 \dots v_k$, där $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för $i = 1 \dots k-1$.

En **väg**: en vandring som inte passerar någon kant mer än en gång.

En **krets**: en sluten väg, dvs en väg som börjar och slutar i samma hörn.

En **stig**: en väg som inte passerar något hörn mer än en gång.

En **cykel**: en sluten stig, dvs en krets där inget hörn passeras mer än en gång.

Grafen G är **sammanhängande** om två godtyckliga hörn kan förbindas med en vandring/väg/stig.

En **komponent** av grafen: en maximal sammanhängande del.

Intressanta:

En **eulerväg**: en väg som passerar varje kant i E exakt en gång.

En **eulerkrets**: en krets som passerar varje kant i E exakt en gång.

G har en eulerväg (eulerkrets) $\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ är sammanhängande (+ ev. lösa hörn),} \\ G \text{ har högst två (resp. inget) udda hörn.} \end{cases}$

(Nästa gång:) En **hamiltonstig**: en stig som går genom alla hörn i V .

(Nästa gång:) En **hamiltoncykel**: en cykel som går genom alla hörn i V .

Det är **mycket svårare** att avgöra om en (stor) graf har en hamiltonstig/cykel än om den har en eulerväg/krets.

En graf sägs vara **eulersk**, en **eulergraf**, omm den har en eulerkrets och den kallas **hamiltonsk**, en **hamiltongraf**, omm den har en hamiltoncykel.