

Om gruppens verkan på mängder

Definition: Gruppen G verkar på mängden X om det finns $\varphi : G \times X \rightarrow X$ med

$$\begin{cases} \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x) \text{ för alla } g, h \in G, x \in X \\ \varphi(1, x) = x \text{ för alla } x \in X \quad (1 \text{ är identitets-elementet i } G). \end{cases}$$

Flera av de grupper vi studerat har som element funktioner på någon mängd och sammansättning av dessa funktioner som operation, t.ex. G_Δ , $G_\square$, S_n . I de fallen ges den "naturliga" verkan av G på X av elementens definition, t.ex. för $\pi \in S_n$ och $x \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ att $\varphi(\pi, x) = \pi(x)$.

Om G verkar på X skriver man oftast gx (eller $g(x)$) i stället för $\varphi(g, x)$. Då gäller

$$\begin{cases} (gh)x = g(hx) \text{ för alla } g, h \in G, x \in X \\ 1x = x \text{ för alla } x \in X \quad (1 \text{ är identitets-elementet i } G) \end{cases}$$

Varje g ger en **bijektion** $X \rightarrow X$ (dvs en permutation av X).

Definitioner: Om G verkar på X och $x \in X$ är

stabilisatorn för x : $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ (en delgrupp till G),

medan (se upp med beteckningen!)

banan för x är $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ (en delmängd till X).

Banorna ger en partition av X (svarande mot **ekvivalensrelationen** $\sim$ definierad av $x \sim y$ om det finns $g \in G$ så att $y = gx$).

Vi definierar också $G_{x \rightarrow y} = \{g \in G \mid gx = y\}$ (så $G_x = G_{x \rightarrow x}$) och får

Sats: Om $h \in G_{x \rightarrow y}$ gäller $G_{x \rightarrow y} = hG_x = G_y h$ (höger- och vänstersidoklass till olika delgrupper), så

$$|G_{x \rightarrow y}| = \begin{cases} |G_x| = |G_y| & \text{om } y \in Gx \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Eftersom $G = \bigcup_{y \in Gx} G_{x \rightarrow y}$ och $G_{x \rightarrow y} \cap G_{x \rightarrow z} = \emptyset$ om $y \neq z$ (dvs $G_{x \rightarrow y}$ för $y \in Gx$ ger en partition av G) gäller

Sats: Om G verkar på X gäller för alla $x \in X$ att

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|.$$

Antalet banor för G 's verkan på X (med $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$):

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{(g,x) \in G \times X \\ gx=x}} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|, \text{ så}$$

Sats ("Burnsides lemma"): Om G verkar på X är antalet banor

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|, \text{ där } X_g = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Om G verkar på M verkar den också på $C^M = \{f : M \rightarrow C\}$, mängden av C -värda funktioner på M , enligt $(gf)(m) = f(g^{-1}m)$. Om C är en mängd färger är C^M mängden av färgningar av M och banorna svarar mot de "väsentligt olika" färgningarna (dvs sådana som inte kan överföras i varandra med något $g \in G$).

T.ex. fås **antalet färgningar av kubens sidor** med k färger:

$$\frac{1}{24}(k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)$$

(för var och en av kubens 24 rotationssymmetrier bestäms hur många färgningar som är oförändrade).