(Abstrakt) algebra, om grupper

Begreppet **grupp** definieras **axiomatiskt**:

$(G, *)$ är en **grupp** om G1–G4 är uppfyllda (G en mängd, $*$ en binär operation),

G1.	$\forall\, x, y \in G$	$x * y \in G$	slutenhet
G2.	$\forall\, x, y, z \in G$	$(x * y) * z = x * (y * z)$	associativitet
G3.	$\exists\, e \in G \;\; \forall\, x \in G$	$e * x = x * e = x$	identitet
G4.	$\forall\, x \in G \;\; \exists\, x^{-1} \in G$	$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$	invers

($\forall x \in G \ldots$ betyder här "för alla x i G gäller ...",
$\exists x \in G \ldots$ betyder "det finns (minst) ett x i G så att ...".)

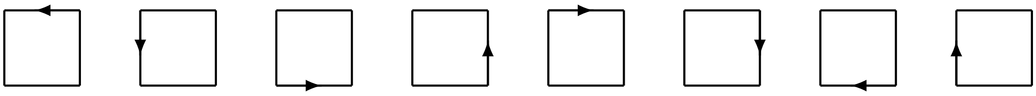
(Vi skriver ofta $\cdot$ (eller inget) för $*$ och 1 eller I för e i en grupp.)

Exempel: Permutationsgrupperna S_n, symmetrigrupper,
$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_m, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ (p primtal) , ...

Som exempel visades **grupptabellerna** ("multiplikationstabellerna") för $G_\triangle$ och $G_\square$, **symmetrigrupperna** för en **liksidig triangel** och för en **kvadrat**.

Elementen i $G_\square$ är symmetriavbildningar för kvadraten:

Rotationer: speglingar:



i $\quad r \quad r^2 \quad r^3 \quad x \quad xr \quad xr^2 \quad xr^3$

(i är identitetsavbildningen. Figurerna visar hur motsvarande avbildning "flyttar" kvadraten från "standardläget", det vid i ovan.)

Gruppen **genereras** av $\{x, r\}$, dvs varje element kan som ovan skrivas som $x^i r^j$ med $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Gruppen beskrivs helt av **relationerna**

$$x^2 = r^4 = i, \quad rx = xr^3$$

Grupptabellen blir:

	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
i	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
r	r	r^2	r^3	i	xr^3	x	xr	xr^2
r^2	r^2	r^3	i	r	xr^2	xr^3	x	xr
r^3	r^3	i	r	r^2	xr	xr^2	xr^3	x
x	x	xr	xr^2	xr^3	i	r	r^2	r^3
xr	xr	xr^2	xr^3	x	r^3	i	r	r^2
xr^2	xr^2	xr^3	x	xr	r^2	r^3	i	r
xr^3	xr^3	x	xr	xr^2	r	r^2	r^3	i

Slut på exemplet.

Om $ab = ba$ för alla $a, b \in G$ kallas G **abelsk** (eller **kommutativ**).

Sats: Om a, b är element i gruppen G har ekvationerna $\boldsymbol{ax = b}$ och $\boldsymbol{ya = b}$ **entydiga lösningar** $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$ i G.

Grupptabellen är alltså en **latinsk kvadrat**.

Ordningen för en grupp G : $|G|$

$$\text{för ett element } g \in G \;: o(g) = \begin{cases} \text{om } g^n = 1, \text{ något } n > 0 : \textbf{ minsta} \text{ sådana } n \\ \text{annars} : \infty \end{cases}$$

Sats : Om $o(g) = m$: $\quad g^s = 1 \Leftrightarrow m \mid s$

Cykliska grupper

G är en **cyklisk grupp** med **generator** $g \in G$ om för varje $x \in G$ finns $n \in \mathbb{Z}$ så att $x = g^n$. Vi säger att g **genererar** G och skriver $G = \langle g \rangle$.

$o(g) = m : \quad \langle g \rangle = C_m = \{1, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$, som $(\mathbb{Z}_m, +)$

$o(g) = \infty : \quad \langle g \rangle = C_\infty = \{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, \ldots\}$, som $(\mathbb{Z}, +)$