

(SF1662 Diskret matte CL1, vt12: F13, må 19 mars 2012)

Principen om inklusion och exklusion (sållprincipen)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha_i$$

där $\alpha_i = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} |A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_i}|$.

ex. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \underbrace{|A_1| + |A_2| + |A_3|}_{\alpha_1} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_2} + \underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{\alpha_3}$

Som ett exempel visade vi att andelen av alla permutationer f av en n -mängd som för alla x uppfyller $f(x) \neq x$ är

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(= \frac{1}{e} + \frac{(-1)^n e^\xi}{(n+1)!}, \quad \text{för något } \xi, -1 < \xi < 0 \right).$$

”Sannolikheten att ingen får sin egen hatt om n hattar fördelas på måfå (dvs likafördelat) bland ägarna är nära $\frac{1}{e}$ (nästan oberoende av n (inte för litet)).”

Stirlingtalen (av andra slaget) $S(n, k)$: antalet partitioner (uppdelningar) av en n -mängd i precis k (icke-tomma) delar.

Rekursivt:
$$\begin{cases} S(n, 1) = S(n, n) = 1, & n = 1, 2, \dots \\ S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), & 1 < k < n \end{cases}$$

”Stirlings triangelf”:

			1									
			1	3	1							
			1	7	6	1						
			1	15	25	10	1					
1	1	31	301	90	350	65	140	15	21	1		

Om $|X| = n$ och $|Y| = k$ är antalet surktioner $f : X \rightarrow Y$

$$k! S(n, k)$$

Antalet ekvivalensrelationer på $X =$ antalet partitioner av $X =$

$$\sum_{k=1}^n S(n, k), \quad (|X| = n)$$

Men varför är

$$k^n = \sum_{i=1}^{\min(k,n)} S(n, i)(k)_i ?$$