

Induktion och rekursion

Bevis med induktion, för påståenden om naturliga tal:

Om för påståendet $P(n)$ en av följande gäller för alla $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} i) & P(0) & (\text{bas}) \\ ii) & P(k) \Rightarrow P(k+1) & (\text{steg}) \end{cases} \quad \textbf{eller} \quad (P(m) \text{ för alla } m < k) \Rightarrow P(k)$$

så är $P(n)$ sann för alla $n = 0, 1, \dots$.

Definition med rekursion, av talföljder:

Villkoret att en av följande gäller för alla $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} i) & u_0 = c & (\text{bas}) \\ ii) & u_{k+1} = \phi(u_k, k) & (\text{steg}) \end{cases} \quad \textbf{eller} \quad u_k = \Phi(\{u_i\}_{i=0}^{k-1}, k)$$

(med c ett givet tal och ϕ, Φ givna funktioner)

definierar u_n entydigt för alla $n = 0, 1, \dots$.

Egenskaper för rekursivt definierade följder kan bevisas med induktion.

Den väsentliga egenskapen hos de naturliga talen som gör induktionsbevis och rekursiva definitioner möjliga är att de är **välordnade**, dvs de är ordnade (av $<$) så att varje icke-tom mängd naturliga tal har ett **minimalt element**.

(Man kan t.ex. inte bevisa egenskaper för de positiva rationella talen med induktion, de är ordnade men inte välordnade (det finns t.ex. inget minsta rationellt tal som är > 1 .)

Vi definierade **fibonaccitalen** F_n : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ rekursivt enligt

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

och visade med induktion att $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ för $n = 0, 1, \dots$

Varje naturligt tal n kan skrivas som en summa av fibonaccital, utan två efterföljande och utan att använda F_0 och F_1 , på precis ett sätt, dvs

$$n = F_{m_1} + F_{m_2} + \dots + F_{m_k},$$

med $m_i \geq m_j + 2$ om $i < j$ och alla $m_i \geq 2$, där k och $m_1, m_2, \dots, m_k$ bestäms entydigt av n .

Vi hann inte avsluta beviset för detta.