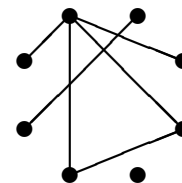


## Grafteori

En **graf**  $G = (V, E)$ :

$V$  en ändlig mängd, **hörnen** (eller **noderna**)  
 $E$  en mängd 2-delmängder till  $V$ , **kanterna**



$x, y \in V$  sägs vara **grannar** i grafen om  $\{x, y\} \in E$ .

I en **grannlista** (eng. adjacency list) för  $G$  anges för varje hörn vilka dess grannar är. Den beskriver grafen fullständigt.

Det gör också **grannmatrisen** (typ  $|V| \times |V|$ ), med element  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$   
och **incidensmatrisen**, med  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } v_i \in e_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$  (så matrisen är av typ  $|V| \times |E|$ ).

$G_1$  och  $G_2$  är **isomorfa** ("strukturellika") om det finns

en **bijektion**  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ , så att  $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$

**Valensen** (eller **graden**) för ett hörn  $v$ :

$\delta(v) =$  antalet grannar till  $v$

$G$  är **reguljär** om alla valenser är lika

**Sats:**  $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$

Följdsats: Antalet **udda hörn** (dvs hörn med udda valens) är **jämnt**.

Benämningar (inte helt standardiserade) för hörnföljder i en graf  $G = (V, E)$ :

En **vandring**:  $v_1 v_2 \dots v_k$ , där  $\{v_i v_{i+1}\} \in E$  för  $i = 1 \dots k - 1$

En **väg**: en vandring som inte passerar någon kant mer än en gång.

En **krets**: en sluten väg, dvs en väg som börjar och slutar i samma hörn.

En **stig**: en väg som inte passerar något hörn mer än en gång.

En **cykel**: en sluten stig, dvs en krets där inget hörn passeras mer än en gång.

Grafen  $G$  är **sammanhängande** om två godtyckliga hörn kan förbindas med en vandring/väg/stig.

Intressanta:

En **eulerväg**: en väg som passerar varje kant i  $E$  exakt en gång.

En **eulerkrets**: en krets som passerar varje kant i  $E$  exakt en gång.

$G$  har en eulerväg (eulerkrets)  $\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ är sammanhängande (+ ev. lösa hörn),} \\ G \text{ har högst två (resp. inget) udda hörn.} \end{cases}$

En **hamiltonstig**: en stig som går genom alla hörn i  $V$ .

En **hamiltoncykel**: en cykel som går genom alla hörn i  $V$ .

Det är **mycket svårare** att avgöra om en (stor) graf har en hamiltonstig/cykel än om den har en eulerväg/krets.

En graf sägs vara **eulersk** omm den har en eulerkrets och den kallas **hamiltonsk** omm den har en hamiltoncykel.