

(Diskret matte CL, vt10: F11, må 22 mars 2010)

Direkta produkten av grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$:

$$(G_1, *_1) \times (G_2, *_2) = (G_1 \times G_2, \circ), \text{ med } (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

Definition: Delgruppen N till G kallas en **normal delgrupp**

om vänstersidoklasserna = högersidoklasserna, dvs

$$gN = Ng \text{ för alla } g \in G \quad (\text{ekvivalent: } gNg^{-1} = N).$$

(Speciellt är alla delgrupper till en abelsk grupp normala.)

Då är $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ en grupp, **kvotgruppen**,

$$\text{med operation } g_1Ng_2N = \{h_1h_2 \mid h_1 \in g_1N, h_2 \in g_2N\} = g_1g_2N.$$

Definition: En funktion $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ kallas en **homomorfi** mellan grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ om:

$$\psi(g *_1 g') = \psi(g) *_2 \psi(g') \quad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

(En isomorfi är alltså precis en bijektiv homomorfi.)

$\psi : G \rightarrow G/N$ med $\psi(g) = gN$ är då en homomorfi.

(Och för en godtycklig homomorfi $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ är $\psi(G_1) \approx G_1/N$, där $\psi(G_1) = \{\psi(g) \mid g \in G_1\}$ är en delgrupp till G_2 och N en normal delgrupp till G_1 , $N = \psi^{-1}(\{1_2\}) = \{g \in G_1 \mid \psi(g) = 1_2 \text{ (identitetselementet i } G_2)\}$.)

Två andra **viktiga algebraiska strukturer** (bara lite om dem i denna kurs):

$(R, +, \cdot)$ är en **ring** om

1) $(R, +)$ är en **kommutativ grupp** med **identitetselement** 0

2) $(R, \cdot)$ är **sluten** och **associativ**, med **identitetselement** 1

3) $\cdot$ är **distributiv** m.a.p. $+$,

$$a(b+c) = ab+ac, (a+b)c = ac+bc \quad \text{för alla } a, b, c \in R$$

Exempel: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, $M_n(R)$, $R[x]$

Sats: $(U(R), \cdot)$ är en grupp,

där $U(R)$ är de **inverterbara** elementen i R .

Exempel: $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$, $U(\mathbb{Z}_m) = \{r \in \mathbb{Z}_m \mid \text{sgd}(r, m) = 1\}$

$(F, +, \cdot)$ är en **kropp** (eng. field) om

1) $(F, +, \cdot)$ är en **ring**

2) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ är en **kommutativ grupp**

Exempel: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ (p primtal)

En **permutation** är en bijektion $\pi : X \rightarrow X$

$S_n : \{\text{alla permutationer av } [n] = \{1, 2, \dots, n\}\}, \quad |S_n| = n!$

$(S_n, \circ)$ är en **grupp** ($\circ$ sammansättning av funktioner).

Beteckningar för π :

$$\textbf{Tvåradnotation:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ l & \dots & \dots & j & \dots & i & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Enradnotation:} \quad [l \dots \dots j \dots i \dots \dots \dots \dots]$$

$$\textbf{Cykelnotation:} \quad (1 \ l \dots)(i \ j \dots k) \dots$$

Då $\pi(1) = l, \dots, \pi(i) = j, \dots, \pi(k) = i, \dots$