

Tjugofemte och sista föreläsningen

● Repetitionsproblem:

1. På hur många sätt kan fem byar förenas med vägar så att ingen by är isolerad?
2. Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ så att $p(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{125}$.
3. Låt grafen G ha det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$. På hur många sätt kan G hörnfärgas med **exakt** λ färger, dvs så att varje färg används?

4. Låt p och q vara primtal så att $q \mid 2^p - 1$. Visa att $q > p$.

5. Visa att det finns ett $r \in \mathbb{Z}_+$ så att $4711 \mid \underbrace{731731 \dots 731}_{r \text{ st } 731}$.

6. Visa att grafen $G = (V, E)$, valenser $\delta(v)$ för $v \in V$, har minst

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v) + 1}$$

oberoende hörn (dvs sådana att inga av dem är grannar).

7. Av en cirkulär tårta, med brun ovansida och vit undersida, skärs bitar med medelpunktsvinkel x intill varandra. Då en bit skurits, vänds den genast upp och ner och läggs in på sin gamla plats (och växer fast igen). Detta upprepas runt, runt tårtan.

Låt $nx < 2\pi < (n+1)x$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

- a. Blir tårtan någon gång helt vit? Efter hur många vändningar?
- b. Blir tårtan helt brun igen? Efter hur många vändningar?

8a. Visa att om de 52 korten i en kortlek delas upp i 13 högar med 4 kort i varje, är det möjligt att välja ett kort ur varje hög så att det blir precis ett kort av varje valör.

b. Visa att man kan dra ett kort slumpmässigt ur en av högarna och komplettera med ett kort var ur de övriga högarna, så att det ändå blir 13 olika valörer.

9. 100 personer (alla med olika namn) får ett märkligt erbjudande.

I ett rum står, får de veta, 100 lådor, numrerade från 1 till 100. Var och en av personerna får skriva sitt namn på en lapp och de hundra lapparna fördelas slumpmässigt i lådorna, en i varje låda. Varje person skall sedan gå in i rummet och läsa namnet i en av lådorna. Om det inte är hans eget namn får han försöka en annan låda osv. Om han finner sitt eget namn genom att titta på högst 50 av dem, har han lyckats och skall lämna rummet precis som han fann det (och inte kommunicera med de andra) och nästa person komma in och försöka.

Om de **alla** lyckas, dvs finner lappen med sitt eget namn, får de säckvis med guldpengar att dela på, annars (om en enda av dem misslyckas) får de ingenting.

a. Vad är sannolikheten att de skall få pengarna om de inte heller får ha kontakt innan de går in (och saknar andra ledtrådar, typ röntgenblick)?

b. Visa att de om de i förväg får bestämma en gemensam strategi kan öka sannolikheten att de skall få pengarna till över 30%(!).

10. Hur många väsentligt olika färgningar med högst k färger av **kanterna** i en ikosaeder finns det?

11. 100 personer har biljett till varsin av de 100 platserna i en biosalong. Den som går in först har dock tappat sin biljett och sätter sig på en slumpmässigt (likafördelat) vald plats. Var och en av de övriga sätter sig på sin egen plats om den är ledig, annars på en lika slumpmässigt vald (ledig) plats.

Vad är sannolikheten att den som kommer in sist hamnar på sin egen plats? Att den k :e personen från slutet hamnar rätt?

12. A och B utför en kortkonst på följande sätt. A får fem kort som slumpvis dragits ur en kortlek, tittar på dem, gör en hög av fyra av korten och ger högen till B. B tittar på de fyra korten och talar om vilket det femte kortet är.

Hur bär de sig åt?