

Sist

F16 Gruppisomorfi

$(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$ är isomorfa,

$(G_1, *) \approx (G_2, \circ)$, om det finns en
bijektion $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ så att

$$\phi(g * g') = \phi(g) \circ \phi(g'), \text{ alla } g, g' \in G_1$$

strukturen bevaras

ex. $(\mathbb{R}_+, \cdot) \approx (\mathbb{R}, +)$, $\phi(x) = \log x$

Isomorfi är en ekvivalensrelation
mellan grupper

Direkt produkt av grupper:

$$(G_1, *_1) \times (G_2, *_2) = (G_1 \times G_2, \circ)$$

$$\text{med } (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

H är en delgrupp till $(G, *)$

om $H \subseteq G$ och $(H, *)$ är en grupp

Sats: Om G är en grupp och $H \subseteq G$
är H en delgrupp till G om

$$\begin{cases} S0 & H \neq \emptyset \\ S1 & x, y \in H \Rightarrow xy \in H \\ S2 & x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{cases}$$

Om H är ändlig, räcker S0 och S1

G 's centrum $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \text{ alla } g \in G\}$
är en delgrupp till G

Centralisatorn $(i G)$ till $g \in G$

$$C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\} \text{ likaså}$$

Cykliska delgruppen genererad av $g \in G$

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad |\langle g \rangle| = o(g)$$

G_1 är isomorf med en delgrupp till $G_1 \times G_2$

$$G_1 \cong \{(g_1, 1_2) \mid g_1 \in G_1\}$$