Sist
F15

$(G, *)$ är en grupp om

G1 $\forall x, y \in G \quad x * y \in G$ slutenhet

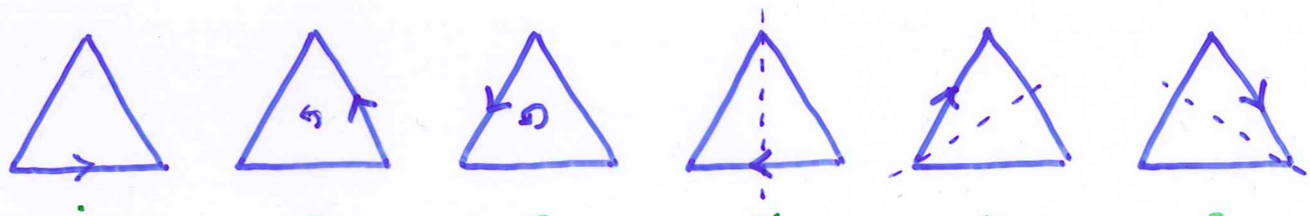
G2 $\forall x, y, z \in G \quad (x*y)*z = x*(y*z)$ associativitet

G3 $\exists I \in G \ \forall x \in G \quad I * x = x * I = x$ identitetselement

G4 $\forall x \in G \ \exists x^{-1} \in G \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = I$ invers

($\forall x \in G \ \ldots$: "för alla x i G gäller ...",
$\exists x \in G \ \ldots$: "det finns x i G så att ...")

Symmetrigruppen för en liksidig triangel, $G_\triangle$



i	r	s	x	y	z
		r^2		xr	xr^2

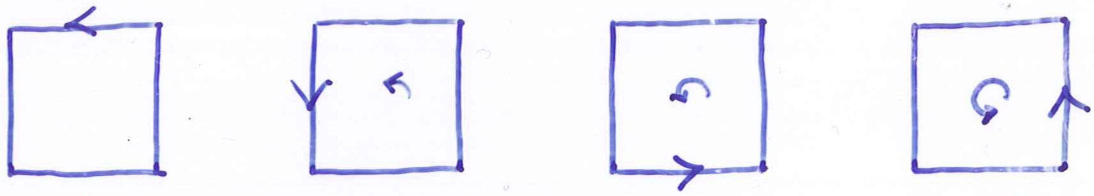
	i	r	s	x	y	z
i	i	r	s	x	y	z
r	r	s	i	z	x	y
s	s	i	r	y	z	x
x	x	y	z	i	r	s
y	y	z	x	s	i	r
z	z	x	y	r	s	i

$$r^3 = x^2 = i$$

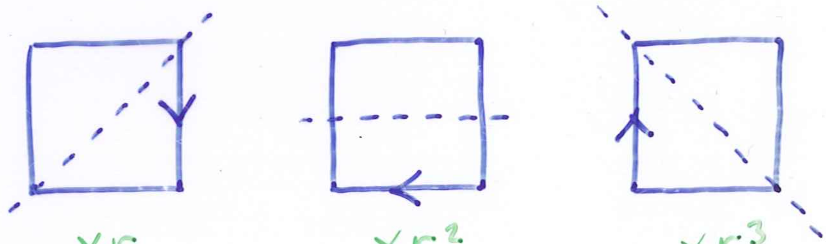
$$rx = xr^2$$

	i	r	r^2	x	xr	xr^2
i	i	r	r^2	x	xr	xr^2
r	r	r^2	i	xr^2	x	xr
r^2	r^2	i	r	xr	xr^2	x
x	x	xr	xr^2	i	r	r^2
xr	xr	xr^2	x	r^2	i	r
xr^2	xr^2	x	xr	r	r^2	i

Symmetrigruppen för en kvadrat



i r r^2 r^3



x xr xr^2 xr^3

$$r^4 = x^2 = i \quad , \quad rx = xr^3$$

	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
i	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
r	r	r^2	r^3	i	xr^3	x	xr	xr^2
r^2	r^2	r^3	i	r	xr^2	xr^3	x	xr
r^3	r^3	i	r	r^2	xr	xr^2	xr^3	x
x	x	xr	xr^2	xr^3	i	r	r^2	r^3
xr	xr	xr^2	xr^3	x	r^3	i	r	r^2
xr^2	xr^2	xr^3	x	xr	r^2	r^3	i	r
xr^3	xr^3	x	xr	xr^2	r	r^2	r^3	i

Om $ab = ba$ för alla $a, b \in G$

kallas gruppen G abelsk (kommutativ)

Sats: Om $a, b \in G$, en grp, har

$ax = b$ och $ya = b$

entydiga lösningar $(a^{-1}b, ba^{-1})$ i G

Så grupptabellen är en latinsk kvadrat

Ordningen $\begin{cases} \text{för en grupp } G : & |G| \\ \text{för ett element } g \in G : & o(g) \end{cases}$

$$o(g) = \begin{cases} \text{om } g^n = 1, \text{ ngt } n > 0 : & \text{minsta } n \\ \text{annars} & : \infty \end{cases}$$

Sats: Om $o(g) = m$: $g^s = 1 \iff m \mid s$

G är en cyklisk grupp om för ngt $g \in G$, varje $x \in G$ är g^n, $n \in \mathbb{Z}$

g genererar G, $G = \langle g \rangle$

$o(g) = m$: $C_m = \{1, g, \ldots, g^{m-1}\}$

$o(g) = \infty$: $C_\infty = \{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, \ldots\}$