

Sist
F5

Induktionsbevis

För att visa $P(n)$ för alla $n=0,1,\dots$ räcker visa

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} P(0) & \text{bas} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1), \text{ alla } k=0,1,\dots & \text{steg} \end{cases}$$

eller

$$\textcircled{2} \quad (P(m), \text{ alla } m=0,1,\dots,k-1) \Rightarrow P(k), \text{ alla } k=0,1,\dots$$

"stark induktion"

(Välordning: varje icke-tom mängd naturliga tal har ett minimalt element)

Rekursion (definition)

$$\begin{cases} u_0 = c & \text{bas} \\ u_{k+1} = \varphi(u_k, k), \text{ alla } k=0,1,\dots & \text{steg} \end{cases}$$

eller

$$u_k = \Phi(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$$

definierar $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ entydigt

Egenskaper för den visas med induktion

Ex. Fibonaccitalen F_n , $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}_{\phi \approx 1,618} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad n = 0, 1, \dots$$

$\phi \approx 1,618$ gyllene snittet

Vare naturligt tal kan entydigt skrivas som en summa av icke-konsekutiva fibonaccital bland $F_2, F_3, F_4, \dots$

$$\begin{aligned} \text{ex. } 31 &= 21 + 8 + 2 = F_8 + F_6 + F_3 = \\ &= 1010010_{\text{Fib}} \end{aligned}$$