

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Är a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, b) $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ en grupp?

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

2. Är a) $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$, b) $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{0\}, \cdot)$ en grupp?

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

3. Är $(S_{12}, \cdot)$ en grupp (med ' $\cdot$ ' för produkten i S_{12})?

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

4. Härintill ses två rader i en delvis ifylld grupptabell. Vad står $\otimes$ för?

	a	b	c	d	e
a	e	c	a	b	$-$
b	$-$	$-$	$-$	$-$	$\otimes$

R: a , G: b , B: d

5. Vad är ordningen för xrx i G_{Δ} ?

R: 2, G: 3, B: 5

6. Är $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ cyklisk?

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

Svar:

- 1a. R, ty alla $(\mathbb{Z}_m, +)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, är grupper (G1–G4 uppfyllda).
- b. G, ty t.ex. 0 och 2 saknar inverser (men G1–G3 är uppfyllda).
- 2a. R, ty alla $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$, p primtal, är grupper (G1–G4 uppfyllda).
- b. G, ty t.ex. $3 \cdot 4 = 0 \notin \mathbb{Z}_{12} \setminus \{0\}$ (och 2, 3, 4 saknar inverser)
(G2 och G3 är uppfyllda).
3. R, ty G1–G4 är uppfyllda för alla S_n .
4. R, ty $ae = d$ (grupptabellen är en latinsk kvadrat),
 $bc = b$, ty $ac = a = a1 \Rightarrow c = 1$,
 $ba = 1 = c$, ty $ab = c = 1 = aa^{-1}$, så $b = a^{-1}$, och
 $be \neq e$, ty $e = ce$ och $b \neq c$,
så $be = a$ (latinsk kvadrat).
Alt. $a^2 = e$, $a^3 = ae = d$ (som ovan) $a^4 = ad = b$, $a^5 = ab = c$,
så $be = a^4a^2 = a^6 = aa^5 = ac = a$.
5. G, ty $x^2 = i (= 1)$ i G_Δ , så $(xrx)^n = x r^n x$ och $(xrx)^n = i \Leftrightarrow r^n = x^2 = i$.
Alt. $xrx = (xr)x = yx = s$ och $o(s) = 3$ (ty $s \neq i, s^2 = r \neq i, s^3 = i$).
6. R, ty $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$ och $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 9 \cdot 3 = 7$, $3^4 = 7 \cdot 3 = 1$.