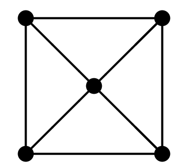
Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. En av följande är $P_G(\lambda)$ för grafen G härintill. Vilken?



R: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$,

G: $\lambda(\lambda-2)^2(\lambda^2+1)$,

B: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+7)$

2. På hur många sätt kan de 5 ytorna till G i fråga 1 färgas med högst 5 färger (med angränsande ytor olikfärgade)?

R: 360, G: 420, B: 540

3. Hur många olika fullständiga matchningar har K_8?

R: 0, G: 63, B: 105

4. Låt $M_0 = \{1, 2, \dots\}$,
$M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1, 2, 3\}$, ...

a. Har $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ någon transversal?

R: ja, G: nej, B: vet ej

b. Uppfyller $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ villkoret i Halls sats?

R: ja, G: nej, B: vet ej

c. Hur är det möjligt?

R: Antalet mängder i Halls sats måste vara ändligt,

G: Mängderna i Halls sats måste vara ändliga,

B: Minst endera (av de föregående) måste gälla

Svar:

1. B, ty $P_{G_R}(3) = 0$ och $P_{G_G}(1) \neq 0$, ingendera stämmer med att $\chi(G) = 3$.
   (Att bestämma $P_G(\lambda)$ är en uppgift på öks5.)

2. G, ty ytfärgningar av G motsvarar precis hörnfärgningar av $G^\perp$, så det sökta antalet är $P_{G^\perp}(5) = P_G(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 420$ ($G^\perp$ är isomorf med G).
   (Alt. $5 \cdot P_{C_4}(4) = 5 \cdot ((4-1)^4 + (-1)^4(4-1)) = 5 \cdot (81+3) = 420$.)

3. B, ty det första hörnets partner kan väljas på 7 sätt,
   det första av övrigas partner på 5 sätt, sedan 3 resp. 1 sätt,
   så totalt $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$ sätt (alt. $\frac{1}{4!}\binom{8}{2,2,2,2} = 105$ sätt).

4a. G, ty för $i = 1, 2, \ldots$ måste M_i representeras av i,
   så M_0 får ingen representant.

4b. R, ty för $A \subseteq \mathbb{N}$: om $|A| = \infty$ eller $0 \in A$ är $|\bigcup_{i\in A} M_i| = \infty \geq |A|$,
   annars ($M_i \subseteq M_j$ om $i < j$, så) $|\bigcup_{i\in A} M_i| = |M_{\max_{i\in A} i}| = \max_{i\in A} i \geq |A|$.
   (I själva verket handlar villkoret om $|A| < \infty$.)

4c. B, ty låt det handla om $\{M_i\}_{i\in I}$.
   Om $|I| < \infty$ kan man för varje $i \in I$ med $|M_i| = \infty$ finna $m_i \in M_i$ med $m_i \neq m_j$ om $|M_i|, |M_j| = \infty$, $i \neq j$ och $m_i \notin M_k$ då $|M_k| < \infty$,
   så Halls sats för det ändliga fallet ger resultatet.
   Om $|M_i| < \infty$ för alla $i \in I$ (men kanske $|I| = \infty$) kan man visa att $|\bigcup_{i\in A} M_i| \geq |A|$ för alla ändliga $A \subseteq I$ medför att en transversal finns,
   men beviset för utanför vår kurs.

Här är för den **verkligt** intresserade en mycket kortfattad beskrivning av hur man kan visa det:
Vi använder en sats som är grundläggande i den gren av logiken som kallas **modellteori**,

Kompakthetssatsen: Om det för en mängd sentenser Γ gäller att varje **ändlig** $\Gamma' \subseteq \Gamma$ har en modell (dvs en tolkning som gör alla Γ':s sentenser sanna) så har också Γ en modell.

(Beviset för kompakthetssatsen bygger på Gödels fullständighetssats, nämnd i bevisstencilen:

$$\Gamma \models p \Leftrightarrow \Gamma \vdash p.$$

Att Γ **inte** har någon modell är detsamma som att $\Gamma \models \perp$ (det betyder ju precis att $\perp$ är sann i alla modeller för Γ (vilket den aldrig är)). Enligt fullständighetssatsen gäller det omm $\Gamma \vdash \perp$ (dvs att man kan härleda $\perp$ från Γ). Men varje härledning använder bara ett ändligt antal av sentenserna i Γ, så $\Gamma \vdash \perp \Leftrightarrow \Gamma' \vdash \perp$ för någon ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Så

$$\Gamma \text{ har en modell } \Leftrightarrow \Gamma \not\models \perp \Leftrightarrow \Gamma \nvdash \perp \Leftrightarrow \Gamma' \nvdash \perp \text{ för alla ändliga } \Gamma' \subseteq \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma' \not\models \perp \text{ för alla ändliga } \Gamma' \subseteq \Gamma \Leftrightarrow \text{Varje ändlig } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ har en modell.}$$

Slut på bevisskissen för kompakthetssatsen.)
Vi återgår till Halls sats i fallet alla $|M_i| < \infty$ och $|I| = \infty$.
Inför (oändligt många) konstanter: c_i för $i \in I$ och d_r för $r \in \bigcup_{i\in I} M_i$.
Låt Γ bestå av alla sentenserna:

$$c_i \neq c_j \text{ för } i, j \in I,\ i \neq j,$$

$$c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \cdots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}} \text{ för } i \in I,\ M_i = \{r_1, r_2, \ldots, r_{|M_i|}\}.$$

Om $\Gamma' \subseteq \Gamma$ är ändlig ingår bara ett ändligt antal av c_i:na i Γ':s sentenser och den ändliga Halls sats ger en modell för Γ' (ingående c_i tolkas som motsvarande m_i i en ändlig transversal).
Kompakthetssatsen ger en tolkning för hela Γ, vilken ger en transversal för det oändliga I (m_i är ett $r \in M_i$ sådant att $c_i = d_r$ i tolkningen). Vi är klara.
Som synes räcker det att Halls villkor är uppfyllt för alla **ändliga** $A \subseteq I$.
(Att $|M_i| < \infty$ behövs för att $c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \cdots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}}$ skall vara en sentens. För att visa Gödels fullständighetssats krävs antaganden om oändliga mängder, något liknande (men något svagare än) det s.k. urvalsaxiomet.)