

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Är $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ delbart med $x + 2$?

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

2. Är $x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibelt? ($x^3 + x + 1 = (x + 2)(x^2 + x + 2)$)

R: Ja, G: Nej, B: Beror på

3. Hur många rotationssymmetrier har en tetraeder?

R: 9, G: 12, B: 15

4. Vad är $|X_g|$ om g är den rotation av en tetraeder som permuterar hörnen som $(1\ 2)(3\ 4)$ och X färgningarna av tetraederns kanter med högst k färger?

R: k^3 , G: k^4 , B: $k^2 + k^4$

5. På hur många väsentligt olika sätt kan kanterna av en liksidig triangel färgas med högst k färger?
("Väsentligt olika": rotation och spegling tillåten.)

R: $\frac{1}{3}(k^3 + 2k)$,

G: $\frac{1}{6}(k^3 + 3k^2 + 2k)$,

B: $\frac{1}{6}(k^3 + 2k^2 + 3k)$

Svar:

1. R, ty $f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 0$ (med $f(x) = x^3 + x + 1$), så enligt faktorsatsen är $f(x)$ delbar med $x - 1 = x + 2$.
2. R, ty $g(0) = g(2) = 2$, $g(1) = 1$ (med $g(x) = x^2 + x + 2$) och enligt faktorsatsen är $g(x)$ inte delbar med något förstgradspolynom, så det har ingen icke-trivial faktorisering (eftersom $g(x)$:s grad är ≤ 3).
3. G, ty om x är ett hörn är $|G_x| = 3$ (x fixeras av 3 rotationer, id medräknad) och $|Gx| = 4$ (x :s bana består av de 4 hörnen), så $|G| = |G_x| \cdot |Gx| = 12$.
Alt. med y mitten av en kant är $|G_y| = 2$, $|Gy| = 6$ etc.
4. G, ty 2 kanter fixeras (12 och 34), så de kan ges godtyckliga färger, övriga måste parvis få samma färger (13 och 24 samma och 14 och 23 samma).
5. G, ty G_Δ har $|G_\Delta| = 6$ med tre typer av element:
 id med $|X_{id}| = k^3$ (godtyckliga färger på kanterna),
2 st rotationer med $|X_r| = k$ (samma färg på alla kanter) och
3 speglingar med $|X_s| = k^2$ (samma färg på (minst) två av kanterna).
Burnsides lemma ger det sökta antalet: $\frac{1}{6}(1 \cdot k^3 + 2 \cdot k + 3 \cdot k^2)$.