Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. **Vad är $U(\mathbb{Z}[i])$, de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}[i]$?**

   R: $\{1, -1\}$, G: $\{i, -i\}$, B: $\{1, -1, i, -i\}$

2. **Vad är $U(\mathbb{Q})$, de inverterbara elementen i $\mathbb{Q}$?**

   R: $\{1, -1\}$, G: $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, B: $\mathbb{Q}$

3. **Om $n = 6 + 5i$, $d = 2 + i$, vilket $q \in \mathbb{Z}[i]$ ger minimalt $|r|^2$, då $n = qd + r$?**

   R: $3 + i$, G: $1 + 2i$, B: $2 + 2i$

4. **Är $7 + 6i$ ett gaussiskt primtal?**

   R: Ja, G: Nej, B: Beror på

5. **$z \in \mathbb{Z}[i]$ har $|z|^2 = 61\,250 = 2 \cdot 5^4 \cdot 7^2$. I hur många gaussiska primtal faktoriseras z?**

   R: 4, G: 6, B: 7

Svar:

1. B, ty $1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = i \cdot (-i) = 1$, så $1, -1, i, -i$ är inverterbara, och $z \cdot w = 1$ ger $|z| \cdot |w| = 1$ med $|z|, |w| \geq 1$, så $|z| = 1$
   ($|z| \geq 1$ för alla $z \in \mathbb{Z}[i] \smallsetminus \{0\}$).

2. G, ty alla element utom 0 i $\mathbb{Q}$ är inverterbara ($(\frac{m}{n})^{-1} = \frac{n}{m}$).

3. R, ty $\frac{6+5i}{2+i} = \frac{(6+5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{17+4i}{5} = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i$ och närmast i $\mathbb{Z}[i]$ är $3 + i$.

4. G, ty $|7 + 6i|^2 = 7^2 + 6^2 = 85 = 5 \cdot 17$, varken ett primtal $\equiv_4 1, 2$ eller kvadraten av ett primtal $\equiv_4 3$.
   ($7 + 6i = (2 + i)(4 + i)$)

5. G, ty varje primfaktor $\equiv_4 1, 2$ och varje faktor p^2 med p ett primtal $\equiv_4 3$ i $|z|^2$ svarar mot en gaussisk primfaktor i z.
   (z kan vara t.ex. $(1 + i) \cdot (2 + i)^4 \cdot 7 = -217 + 119\, i$.)