

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. På hur många sätt kan de svarta pjäserna (8 bönder, 2 torn, 2 springare, 2 löpare, 1 dam, 1 kung, inbördes identiska) placeras ut på ett schackbräde (64 rutor)?

$$\text{R: } 64^8 \cdot 64^6, \quad \text{G: } \frac{64!}{48!}, \quad \text{B: } \frac{64!}{48! \cdot 8! \cdot 8}$$

2. På hur många sätt kan 8 svarta och 8 vita bönder (inbördes identiska) placeras ut på ett schackbräde, om flera pjäser kan stå på samma ruta?

$$\text{R: } \left(\frac{71!}{63! \cdot 8!}\right)^2, \quad \text{G: } \left(\frac{71!}{64! \cdot 7!}\right)^2, \quad \text{B: } \left(\frac{72!}{64! \cdot 8!}\right)^2$$

3. På hur många sätt kan 4 (identiska) kulor placeras i 6 (särskiljbara) lådor med minst 2 i minst en låda?

$$\text{R: } 96, \quad \text{G: } 111, \quad \text{B: } 126$$

4. Hur många $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ har $x_1 + x_2 + x_3 \leq 28$?

$$\text{R: } 1\,355, \quad \text{G: } 27\,308, \quad \text{B: } 4\,495$$

5. Hur många $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}[i]$ krävs för att det säkert skall finnas $k \neq l$ med $\frac{z_k + z_l}{2} \in \mathbb{Z}[i]$? ($\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, de gaussiska heltalen.)

$$\text{R: } 4, \quad \text{G: } 6, \quad \text{B: Något annat}$$

Svar:

1. B, ty rutorna skall fördelas bland tomma (48 st), med bönder (8 st), osv.
Det kan göras på $\binom{64}{48,8,2,2,2,1,1} = \frac{64!}{48! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$ sätt.
2. R, ty produkten av antalen för varje pjäsfärg (multiplikationsprincipen),
för varje färg ordnat (ty identiska pjäser) val med upprepning av rutor,
vilket kan göras på $\binom{64+8-1}{8} = \binom{71}{8}$ sätt (välj 8 pjäser bland 71 pjäsväggar).
3. G, ty från totala antalet fördelningar, $\binom{6+4-1}{4} = 126$ st,
dras antalet där det är högst en i varje låda, $\binom{6}{4} = 15$ st.
4. B, ty det är = antalet sätt att skriva $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$, $x_i \in \mathbb{N}$,
dvs $\binom{4+28-1}{28} = \binom{31}{3} = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 31 \cdot 29 = 5 \cdot (30^2 - 1^2) = 4\,495$.
5. B, ty rätt svar är 5 (postfacksprincipen; $\operatorname{Re} z_k$ och $\operatorname{Re} z_l$ ska ha samma paritet, liksom $\operatorname{Im} z_k$ och $\operatorname{Im} z_l$, 4 möjligheter: jj , uj , ju , uu).