

**Svar och lösningsförslag till ks5, 15 maj 2017,
i SF1662 Diskret matematik**

	sant	falskt
1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$)		
a) Om graferna G_1 och G_2 är isomorfa, är G_1 planär om och endast om G_2 är det. [Jadå. En plan framställning av den ena ger en av den andra.]	×	
b) För en graf med ett jämnt antal hörn (noder) är produkten av hörnens valenser (grader) säkert ett jämnt tal. [Nej. Motexempel: $\bullet - \bullet$.]		×
c) Om en graf $G = (V, E)$ är sammanhängande och innehåller precis en cykel måste $ V = E $. [Ja, om en kant i cykeln tas bort återstår ett träd, med $ E' = V - 1$.]	×	
d) Om G är plan, sammanhängande med valens 4 för alla hörn, måste dualgrafens $G^\perp$ ha precis 2 hörn mer än G . [Ja. $v - e + r = 2$, $4v = 2e$ ger $r = v + 2$ och $v^\perp = r$.]	×	
e) Det kromatiska talet $\chi(G)$ för en graf G är lika med det största av de kromatiska talen för G 's komponenter. [Ja, så många, men inte färre, färger räcker för varje komponent.]	×	
f) Om en bipartit graf är hamiltonsk (dvs har en hamiltoncykel) har den minst två olika fullständiga matchningar. [Ja. Varannan kant i en hamiltoncykel ger en fullständig matchning.]	×	

2a) (1p) Graferna G_1 och G_2 har grannmatriser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi ska avgöra om de är isomorfa.

Lösning:

Nej. G_2 har ett hörn med valens 1 (rad 3 i matrisen), men det har inte G_1 .

Svar: Nej, de är inte isomorfa.

b) (1p) Vi avgör om något träd med 8 hörn har valenser 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 5.

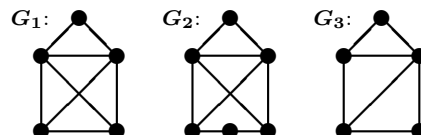
Lösning:

För ett träd $T = (V, E)$ gäller $|V| = |E| + 1$ (om $V \neq \emptyset$). Summan av valenserna är $2|E|$, i vårt fall $2|E| = 1 + 1 + \dots + 5 = 16$, så $|E| = 8 = |V|$. Det är inte valenser för ett träd.

Svar: Nej, inget träd har de valenserna.

c) (1p) Vi skall avgöra vilken av G_1 , G_2 , G_3 som har kromatiskt polynom

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$



Lösning:

$P(\lambda)$ har grad 5, så grafen har 5 hörn, så **inte G_2** .

$P(3) = 0$, men G_3 kan färgas med 3 färger, så **inte G_3** .

Svar: $P(\lambda)$ måste vara kromatiskt polynom för G_1 .

(Alternativt: De fyra nedre hörnen i G_1 kan färgas på $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ sätt, sedan det sista på $\lambda - 2$.)

3) Grafen G beskrivs av granntabellen:

Vi skall (a, 1p) rita G och (b, 2p) ge granntabellen för ett (upp)spännande träd till G .

Lösning:

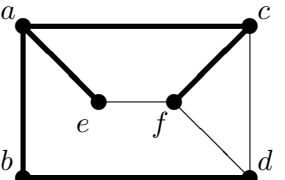
Ett sätt att rita G visas i figuren. Många andra sätt finns.

Ett spännande träd kan fås genom att ta med G -kanter tills det inte går utan att cykler skapas. (Alternativt upprepat ta bort en kant ur varje cykel). Så fås t.ex.:

Svar: Ett spännande träd (feta linjer i fig.) ges av:

Det finns flera andra riktiga svar.

a	b	c	d	e	f
b	a	a	b	a	c
c	d	d	c	f	d
e		f	f		e



a	b	c	d	e	f
b	a	a	b	a	c
c	d	f			
e					

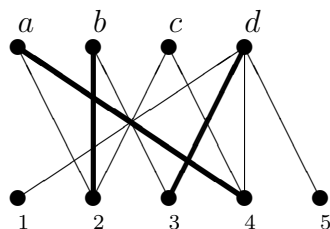
4) (3p) Vi söker antalet ytor en sammanhängande planär graf med 1 hörn med valens 2, 2 hörn med valens 3, 7 hörn med valens 4 och 2 hörn med valens 5 (och inga andra hörn) delar in en sfär i, då den ritas utan korsande kanter.

Lösning:

Enligt Eulers polyederformel är (vanliga beteckningar) $v - e + r = 2$, så $r = 2 - v + e$. Här är $v = 1 + 2 + 7 + 2 = 12$ och $e = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \delta(x) = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = \frac{1}{2} \cdot 46 = 23$, så $r = 2 - 12 + 23 = 13$.

Svar: Antalet ytor är 13.

5) (3p) En matchning M för den bipartita grafen G visas i figuren (feta kanter).



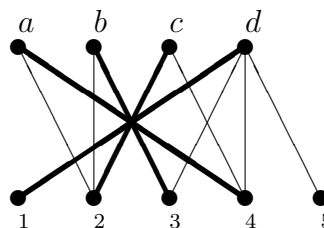
Vi söker alla utökande alternerande stigar för M och skall för en av dessa stigar ange den större matchning M' som kan skapas från M med hjälp av den.

Lösning:

Man finner fyra olika utökande alternerande stigar (dvs alternerande stigar som startar och slutar i omatchade hörn) som startar i c : $(c 2 b 3 d 1)$, $(c 2 b 3 d 5)$, $(c 4 a 2 b 3 d 1)$, $(c 4 a 2 b 3 d 5)$.

Den första ger den nya matchningen härintill.

Eftersom en utökande alternerande stig i en bipartit graf alltid börjar och slutar i olika mängder (den har udda längd) och att följa den åt andra hållet ger en ny utökande alternerande stig, räcker det att söka stigar som börjar i den ena mängden (här kan vi välja att börja i c). Om man startar i de omatchade hörnen 1 och 5 måste man tänka på att inte upprepa hörn (t.ex. kan $1 d 3 b 2 a 4$ inte fortsättas med d).



Svar: Utökande alternerande stigar är $(c 2 b 3 d 1)$, $(c 2 b 3 d 5)$, $(c 4 a 2 b 3 d 1)$ och $(c 4 a 2 b 3 d 5)$ (och omvändningar av dem).

Den första ger M' enligt den högra figuren.