

**Svar och lösningsförslag till ks3, 20 mars 2017,
i SF1662 Diskret matematik**

1)	(För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$)	sant	falskt
a)	Om man slår med två (ärliga) tärningar och totala antalet ögon är minst 9, är sannolikheten $\frac{2}{5}$ att det är precis 9. [Ja, summan ≥ 9 i 10 utfall och av dem är den = 9 i 4 fall. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.]	×	
b)	Om A, B är ändliga mängder och $ A \times B = A \cdot B $ är A och B säkert disjunkta. [Nej. $ A \times B $ är alltid $= A \cdot B $.]		×
c)	Om p är ett primtal och $0 < k < p$ gäller $p \mid \binom{p}{k}$, dvs $\binom{p}{k}$ är delbart med p . [Ja, $p \mid p!$, $p \nmid k!$, $p \nmid (p-k)!$.]	×	
d)	Det finns precis 19800 uppsättningar positiva heltal x_1, x_2, x_3 (dvs $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{Z}_+)^3$) med $x_1 + x_2 + x_3 = 201$. [Nej, $y_1 + y_2 + y_3 = 198$ för $\binom{198+2}{2} = 19900$ st $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{N}^3$.]		×
e)	Stirlingtalet $S(n, k)$ ger antalet sätt att fördela n identiska objekt i k särskiljbara lådor, utan någon tom låda. [Nej, tvärtom. Särskiljbara objekt, identiska lådor ska det vara.]		×
f)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i S_5 är konjugerade permutationer. [Nej, de är $(152)(34)$ och $(14)(2)(35)$, olika cykelstruktur.]		×

2a) (1p) Vi visar: $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow 12 \mid (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

Lösning:

Enligt postfacksprincipen (4 tal, 3 kongruensklasser) är två av talen kongruenta (mod 3), så deras skillnad (och därmed den givna produkten) delbar med 3. Minst två olika par av talen har samma paritet (två par om 2 är udda och 2 jämna, minst tre par om 3 tal har samma paritet), så minst två differenser är delbara med 2. Produkten är alltså säkert en multipel av $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. **Saken är klar.**

2b) (1p) Vi vet antalen partitioner av en 14-mängd enligt $S(14, 9) = 5\,135\,130$, $S(14, 10) = 752\,752$ och $S(14, 11) = 66\,066$ och söker $S(15, 10)$.

Lösning:

Enligt stirlingtalens rekursionsformel är $S(15, 10) = S(14, 9) + 10 \cdot S(14, 10) = 5\,135\,130 + 10 \cdot 752\,752 = 12\,662\,650$.

Svar: Det sökta antalet partitioner är 12 662 650.

2c) (1p) Vi ska avgöra om $\pi \in S_7$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, är jämn eller udda.

Lösning:

På cykelform är $\pi = (16)(275)(34)$. Eftersom antalet cykler av jämn längd är jämnt (2 st), är π en jämn permutation.

Alt. π har totalt 3 cykler och $n = 7$ (i S_n). $n - c(\pi) = 7 - 3 = 4$ är jämnt.

Alt. $[6743215]$ har 16, ett jämnt antal, inversioner $(64, 63, 62, 61, 65, 74, 73, \dots)$.

Svar: π är en jämn permutation.

3) Vi söker antalet "ord" (a, 2p) som kan bildas med 1 1:a, 2 2:or, 3 3:or, 4 4:or och 5 5:or och (b, 1p) antalet av dem utan några 3:or jämte varandra.

Lösning:

a. Antalet ord ges av multinomialtalet $\binom{15}{1,2,3,4,5} = \frac{15!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!}$ (antalet sätt att ordna en multimängd; antalet funktioner positioner $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ som tar värdet 'i' i gånger).

b. Antalet ord utan 3:or jämte varandra är antalet ord av övriga 12 symboler gånger (multiplikationsprincipen) antalet sätt att välja platser för 3 3:or före, mellan eller efter de övriga, så $\binom{12}{1,2,4,5} \cdot \binom{13}{3} = \frac{12!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 5!} \cdot \frac{13!}{3! \cdot 10!}$.

Svar a: $\frac{15!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!}$ (= 37 837 800) ord, **b:** $\frac{12! \cdot 13!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 10!}$ (= 23 783 760) ord.

4) $\pi, \sigma \in S_8$ ges av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Vi ska (a, 2p) ange π^{-1} , $\pi\sigma$ och σ^2 på cykelform och (b, 1p) finna alla $\tau \in S_8$ med $\pi\tau\pi = \sigma^2$.

Lösning:

a. $\pi(1) = 3$, $\pi(3) = 5$, $\pi(5) = 1, \dots$ ger i cykelform $\pi = (1\ 3\ 5)(2\ 6)(4\ 8\ 7)$, så (cyklerna baklänges) $\pi^{-1} = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 8)$.

P.s.s. $\sigma = (1\ 6\ 7\ 3)(2\ 5\ 4)(8)$ och $\pi\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 6)(4\ 8\ 7)(1\ 6\ 7\ 3)(2\ 5\ 4) = (1\ 2)(3)(4\ 6)(5\ 8\ 7)$, $\sigma^2 = (1\ 6\ 7\ 3)^2(2\ 5\ 4)^2 = (1\ 7)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$.

b. $\pi\tau\pi = \sigma^2 \Leftrightarrow \tau\pi = \pi^{-1}\sigma^2 \Leftrightarrow \tau = \pi^{-1}\sigma^2\pi^{-1} = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 8)(1\ 7)(2\ 4\ 5)(3\ 6)(1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 8) = (1\ 6\ 7\ 4\ 5\ 2)(3\ 8)$.

Svar a: $\pi^{-1} = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 8)$, $\pi\sigma = (1\ 2)(4\ 6)(5\ 8\ 7)$ och $\sigma^2 = (1\ 7)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$, **b:** Bara $\tau = (1\ 6\ 7\ 4\ 5\ 2)(3\ 8)$.

(Det går också bra att skriva ut 1-cyklerna.)

5) (3p) Vi söker antalet studenter som älskar precis en av logik, kombinatorik och gruppteori, då vi vet att 102 st älskar minst en av dem, 48 st älskar logik, 42 st älskar kombinatorik, 55 st älskar gruppteori och 11 st älskar alla tre.

Lösning:

Låt L , K , G vara mängderna logik-, kombinatorik- respektive gruppälskare.

Givet är då att $|L \cup K \cup G| = 102$, $|L| = 48$, $|K| = 42$, $|G| = 55$, $|L \cap K \cap G| = 11$.

Med $\alpha_1 = |L| + |K| + |G| (= 48 + 42 + 55 = 145)$,

$\alpha_2 = |L \cap K| + |L \cap G| + |K \cap G|$ och $\alpha_3 = |L \cap K \cap G| (= 11)$ säger

principen om inklusion/exklusion att $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = |L \cup K \cup G| (= 102)$, så

$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 - |L \cup K \cup G|$.

Om man från $|L \cup K \cup G|$ drar α_2 , fås antalet som älskar precis ett av de tre ämnena minus $2 \cdot$ (antalet som älskar alla tre) (som dragits bort tre gånger).

Det sökta antalet är alltså $|L \cup K \cup G| - \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 = 2 \cdot |L \cup K \cup G| - \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \cdot 102 - 145 + 11 = 204 - 145 + 11 = 70$.

Svar: 70 st av studenterna älskar precis ett av de tre ämnena.