Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 14 februari 2017, i SF1662 Diskret matematik

		sant	falskt
1)	(För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)		
a)	$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. [Ja, $F_{n+4} = F_{n+3}+$ $+F_{n+2} = (F_{n+2} + F_{n+1}) + (F_{n+1} + F_n) = (F_{n+1} + F_n) + 2F_{n+1} + F_n$.]	X	
b)	För alla mängder A, B är $A \cap B = \varnothing$ omm $(A \cap B^c)^c = B$. [Nej. $B = \varnothing$ ger t.ex. $(A \cap B^c)^c = A^c$. $(A \cup B^c)^c$ bör det vara.]		X
c)	$(A \vee B) \to (A \wedge B) \vDash A \to B$ för atomära A, B. [Ja, den vänstra är sann omm $A \leftrightarrow B$ är sann. Alt. se $\vdash$; det ger $\vDash$.]	X	
d)	Om $\mathcal{E}$ är en ekvivalensrelation och $a\,\mathcal{E}\,b$ måste $[a] = [b]$. [Ja. $a\mathcal{E}b$ ger $b\mathcal{E}a$ (symmetri), så (transitivitet) $x\mathcal{E}a$ omm $x\mathcal{E}b$.]	X	
e)	Om $f\colon X \to X$ och $f(f(x)) = f(x)$, alla $x \in X$, måste $f(x) = x$, alla $x \in X$. [Nej. Motex: $X = \{0, 1\}, f(0) = f(1) = 0$.]		X
f)	Det finns ingen surjektion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. [Jodå, t.ex. $f(x) = 0$ om $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ om $x \in \mathbb{Q}$.]		X

2a) (1p) Vi söker $A \cap \mathcal{P}(A)$, då $A = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}\}$.

Lösning:

Elementen i $A \cap \mathcal{P}(A)$ är precis de element i A som också är element i $\mathcal{P}(A)$, dvs delmängder till A. $\varnothing \subseteq A$ (ty $x \in A$ för alla $x \in \varnothing$), $\{\{\varnothing\}\} \nsubseteq A$ (ty $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$, men $\{\varnothing\} \notin A$), $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\} \subseteq A$ (ty $\varnothing \in A$ och $\{\{\varnothing\}\} \in A$).

Svar: $\boldsymbol{A \cap \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}\}}$.

2b) (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f\colon X \to Y$ är en **injektion**.

Lösning:

f är injektiv omm för varje $y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$.

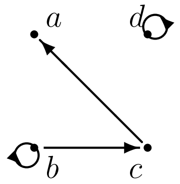
2c) (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv**.

Lösning:

$\mathcal{R}$ är transitiv omm $(x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.

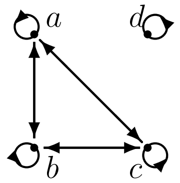
---

3) $X = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(b, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$ och $N = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c)\}$. Vi söker (a, 2p) $N_a \subseteq N$, så att $M \cup N_a$ är en ekvivalensrelation på X och (b, 1p) $N_b \subseteq N$, så att $M \cup N_b$ är en (icke-strikt) partialordning på X.

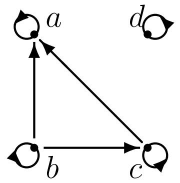


Lösning:

a. Reflexivitet ger att $(a, a), (c, c) \in N_a$. Symmetri ger att $(a, c), (c, b) \in N_a$. Transitivitet ger $(a, b), (b, a) \in N_a$. Dessa räcker för att göra $M \cup N_a$ reflexiv, symmetrisk och transitiv, dvs till en ekvivalensrelation (och inget annat kan läggas till, med den givna N).



b. Reflexivitet ger att $(a, a), (c, c) \in N_b$. Transitivitet ger $(b, a) \in N_b$. Dessa räcker för att göra $M \cup N_b$ reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, dvs till en partialordning (och inget annat kan läggas till, med den givna N).



Svar a: $N_a = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b), (c, c)\}$,
b: $N_b = \{(a, a), (b, a), (c, c)\}$

---

4) (3p) Vi skall med naturlig deduktion visa $A \to (B \to \neg C) \vdash C \to \neg(A \land B)$. Givna härledningsregler: premiss, antagande, DN, $\land$E, $\land$I, $\to$E, $\to$I, $\neg$E, $\neg$I.

Lösning:

1	(1)	$A \to (B \to \neg C)$	premiss	
2	(2)	C	antagande (för $\to$I)	
3	(3)	$A \land B$	antagande (för $\neg$I)	
3	(4)	A	3	$\land$E
1,3	(5)	$B \to \neg C$	1,4	$\to$E
3	(6)	B	3	$\land$E
1,3	(7)	$\neg C$	5,6	$\to$E
1,2,3	(8)	$\bot$	7,2	$\neg$E
1,2	(9)	$\neg(A \land B)$	3,8	$\neg$I
1	(10)	$C \to \neg(A \land B)$	2,9	$\to$I

Saken är klar, ty rätt slutsats på rad 10 beror bara av premissen på rad 1.

---

5) (3p) Vi skall visa $(0^2 - 0) + (1^2 - 1) + \ldots + (n^2 - n) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$ för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Låt $P(n)$ vara påståendet $(0^2 - 0) + (1^2 - 1) + \ldots + (n^2 - n) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$.
Vi använder matematisk induktion för att visa $P(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.
Bas: $\mathrm{VL}_0 = 0^2 - 0 = 0$, $\mathrm{HL}_0 = \frac{1}{3}(0^3 - 0) = 0$, så $P(0)$ sann. **Basen är klar**.
Steg: Låt $k \in \mathbb{N}$ och antag $P(k)$. Då är
$\mathrm{VL}_{k+1} = (0^2 - 0) + \ldots + (k^2 - k) + ((k + 1)^2 - (k + 1)) = \mathrm{VL}_k + (k^2 + k) \overset{\text{ind.ant.}}{=}$
$= \mathrm{HL}_k + (k^2 + k) = \frac{1}{3}(k^3 - k) + (k^2 + k) = \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 2k)$ och
$\mathrm{HL}_{k+1} = \frac{1}{3}((k + 1)^3 - (k + 1)) = \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1) = \mathrm{VL}_{k+1}$,
så $P(k + 1)$ är sann om $P(k)$ är det.
Vi har därmed visat $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$. **Steget är klart**.
Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$. **Saken är klar**.
