Efternamn, förnamn	personnummer	program	blad	uppg.
			1	1

Matematik, KTH
B.Ek

Kontrollskrivning 2, ti 14 februari 2017, 8.00–10.00,
i SF1662, Diskret matematik

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga (utom penna och sudd), inte ens räknedosa.

Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

För in dina svar på uppgift 1 i rutorna nedan och lämna in detta blad tillsammans med övriga lösningsblad.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ (F_n är fibonaccitalen ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$)).		
b)	För alla mängder A, B gäller att $A \cap B = \varnothing$ omm $(A \cap B^c)^c = B$ (X^c betecknar X:s komplementmängd).		
c)	$(A \vee B) \to (A \wedge B) \vDash A \to B$ för atomära sentenser A, B (dvs varje tolkning som gör den vänstra sann gör den högra sann).		
d)	Om $\mathcal{E}$ är en ekvivalensrelation och $a \,\mathcal{E}\, b$ måste $[a] = [b]$ ($[x]$ betecknar x:s ekvivalensklass med avseende på $\mathcal{E}$).		
e)	Om $f\colon X \to X$ och $f(f(x)) = f(x)$, alla $x \in X$, måste $f(x) = x$, alla $x \in X$.		
f)	Det finns ingen surjektion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ är som vanligt mängderna av alla reella respektive rationella tal.)		

Vänd!

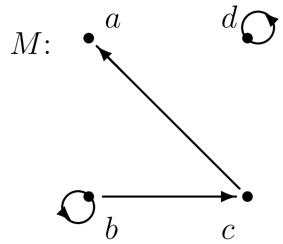
Lösningar på följande uppgifter skrivs på separata papper.

2a) (1p) Finn $A \cap \mathcal{P}(A)$, då $A = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}\}$.
Glöm inga { eller } i ditt svar!
($\mathcal{P}(A)$ är som vanligt A:s potensmängd, mängden av delmängder till A.)

b) (1p) Låt X och Y vara mängder. Vad betyder det (dvs hur definieras) att en funktion $f\colon X \to Y$ är en **injektion**?

c) (1p) Vad betyder det (dvs hur definieras) att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv**?

3) Mängden X har fyra element, $X = \{a, b, c, d\}$.
Givna är följande delmängder av $X^2 = X \times X$:
$M = \{(b, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$,
$N = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b), (c, c), (c, d),$
$(d, b), (d, c)\}$.



a) (2p) Finn $N_a \subseteq N$, så att $M \cup N_a$ definierar en **ekvivalensrelation** på X.
(Dvs så att $\mathcal{R}_a$ är en ekvivalensrelation, där $\mathcal{R}_a$ ges av att $x\mathcal{R}_a y$ omm $(x, y) \in M \cup N_a$.)

b) (1p) Finn $N_b \subseteq N$, så att $M \cup N_b$ definierar en (icke-strikt (dvs som i kursboken)) **partialordning** på X.
(Dvs så att $\mathcal{R}_b$ är en partialordning, där $\mathcal{R}_b$ ges av att $x\mathcal{R}_b y$ omm $(x, y) \in M \cup N_b$.)

(Du skall alltså ange vilka par i N som skall representeras med pilar i figuren, för att den skall visa en ekvivalensrelation respektive en partialordning.)

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$A \to (B \to \neg C) \vdash C \to \neg(A \wedge B).$$

Endast härledningsreglerna på det utdelade bladet får användas.
Observera att varje steg i härledningen måste motiveras med en regel från listan. Det är alltså inte tillåtet att ”forma om” sentenser med t.ex. boolesk algebra eller dra ”uppenbara” slutsatser utan att redovisa vilka härledningsregler som använts.

5) (3p) Visa med matematisk induktion att för $n = 0, 1, 2, \ldots$ är

$$(0^2 - 0) + (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + \ldots + (n^2 - n) = \tfrac{1}{3}(n^3 - n).$$

Glöm inte att motivera ordentligt.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.

Några härledningsregler för naturlig deduktion

Regel för premiss

j	(j)	p	premiss	

Regel för antagande

j	(j)	p	antagande	

Regel för $\wedge$E:

$a_1, \ldots, a_n$	(j)	$p \wedge q$		
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_n$	(k)	p	j	$\wedge$E
		(**eller** q)		

Regel för $\rightarrow$ E:

$a_1, \ldots, a_m$	(j)	$p \rightarrow q$		
	$\vdots$			
$b_1, \ldots, b_n$	(k)	p		
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$	(l)	q	j,k	$\rightarrow$ E

Regel för $\neg$ E:

$a_1, \ldots, a_m$	(j)	$\neg p$		
	$\vdots$			
$b_1, \ldots, b_n$	(k)	p		
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$	(l)	$\perp$	j,k	$\neg$ E

DN-regeln

$a_1, \ldots, a_n$	(j)	$\neg\neg p$		
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_n$	(k)	p	j	DN

Regel för $\wedge$I:

$a_1, \ldots, a_m$	(j)	p		
	$\vdots$			
$b_1, \ldots, b_n$	(k)	q		
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$	(l)	$p \wedge q$	j,k	$\wedge$I

Regel för $\rightarrow$ I:

j	(j)	p	antagande	
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_n$	(k)	q		
	$\vdots$			
$\{a_1, \ldots, a_n\}/j$	(l)	$p \rightarrow q$	j,k	$\rightarrow$ I

Regel för $\neg$ I:

j	(j)	p	antagande	
	$\vdots$			
$a_1, \ldots, a_n$	(k)	$\perp$		
	$\vdots$			
$\{a_1, \ldots, a_n\}/j$	(l)	$\neg p$	j,k	$\neg$ I