Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 30 januari 2017,
i SF1662 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	Division av -34567 med -654 ger principal rest -559. [Nej, den principala resten är ≥ 0 (och < 654) (den är $654 - 559 = 95$).]		$\times$
b)	Om p är ett primtal, $p < m$ och $p \nmid m$ så är p säkert inverterbart i $\mathbb{Z}_m$. [Ja, ty $\mathrm{sgd}(p, m) = 1$.]	$\times$	
c)	Om k är en delare till heltalen m, n, är k säkert en delare till $\mathrm{sgd}(m, n)$ och $\mathrm{mgm}(m, n)$. [Ja, $k \mid \mathrm{sgd}(m, n)$ enligt definitionen av sgd, $k \mid m$, $m \mid \mathrm{mgm}(m, n)$ ger $k \mid \mathrm{mgm}(m, n)$.]	$\times$	
d)	För alla heltal m, n är $\mathrm{sgd}(m, n) = \mathrm{sgd}(m + n, m - n)$. [Nej. Motexempel: m, n udda ger $2 \nmid \mathrm{sgd}(m, n)$, $2 \mid \mathrm{sgd}(m + n, m - n)$.]		$\times$
e)	Om $\mathrm{sgd}(a, m) = d$ har ekvationen $ax = b$ i $\mathbb{Z}_m$ säkert precis d lösningar. [Nej, det krävs också att $d \mid b$.]		$\times$
f)	Om ekvationen $ax = b$ är lösbar i $\mathbb{Z}_m$ är ekvationen $mx = b$ säkert lösbar i $\mathbb{Z}_a$. [Ja, de är lösbara omm $\mathrm{sgd}(a, m) \mid b$ respektive $\mathrm{sgd}(m, a) \mid b$.]	$\times$	

2a) (1p) Vi söker alla heltal $t \geq 2$ som uppfyller $(1001101)_2 = (302)_t$.

Lösning:
$(1001101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77$.
Villkoret på t blir alltså $3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^1 + 2 \cdot t^0 = 3\,t^2 + 2 = 77 \Leftrightarrow t^2 = 25$, så $t = 5$ är enda möjligheten (inte $t = -5$, eftersom $t \geq 2$).

Svar: Det enda sådana talet är $t = 5$.

---

b) (1p) Vi söker $4^{-1} + 7 \cdot 9^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{11}$.

Lösning:
I $\mathbb{Z}_{11}$ är $4^{-1} = 3$ (ty $4 \cdot 3 = 12 = 1$ i $\mathbb{Z}_{11}$) och $9^{-1} = 5$ (ty $9 \cdot 5 = 45 = 1$ i $\mathbb{Z}_{11}$).
Vi får $4^{-1} + 7 \cdot 9^{-1} = 3 + 7 \cdot 5 = 38 = 5$ i $\mathbb{Z}_{11}$.

Svar: Uttryckets värde är 5 i $\mathbb{Z}_{11}$.

---

c) (1p) Vi vet att $\mathrm{sgd}(40\,716, 7\,176) = 156$ och söker $\mathrm{mgm}(40\,716, 7\,176)$.

Lösning:
För heltal $m, n > 0$ är $\mathrm{mgm}(m, n) = \frac{m \cdot n}{\mathrm{sgd}(m,n)}$, så

Svar: $\mathrm{mgm}(40\,716, 7\,176) = \frac{40\,716 \cdot 7\,176}{156}$ $(= 1\,872\,936)$.

---

3) Vi söker (a, 1p) multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_6$ och (b, 2p) a^{1789} i $\mathbb{Z}_6$ för alla $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Lösning:

a. $\mathbb{Z}_6$:s multiplikationstabell finns till höger.
b. $0^{1789} = 0$, $1^{1789} = 1$, tydligen ($0 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$ etc.).
$2 \cdot 2^2 = 2$, så $2^{1789} = 2 \cdot (2^2)^{894} = 2 \cdot (2^2)^{893} = \ldots = 2$.
$3 \cdot 3 = 3$, så $3^{1789} = 3 \cdot 3^{1788} = 3 \cdot 3^{1787} = \ldots = 3$.
$4 \cdot 4 = 4$, så $4^{1789} = 4 \cdot 4^{1788} = \ldots = 4$.
$5^2 = 1$, så $5^{1789} = 5 \cdot (5^2)^{894} = 5 \cdot 1^{894} = 5 \cdot 1 = 5$.

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**0**	**2**	**4**	**0**	**2**	**4**
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
4	**0**	**4**	**2**	**0**	**4**	**2**
5	**0**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Svar a: Se tabellen ovan, b: $\boldsymbol{a^{1789} = a}$ för alla $\boldsymbol{a}$ i $\mathbb{Z}_6$.

4) (3p) Vi söker alla heltal x som uppfyller $2540x \equiv 3048 \pmod{1778}$.

Lösning:

$2540 \equiv_{1778} 2540 - 1778 = 762$ och $3048 \equiv_{1778} 1270$, så $2540x \equiv_{1778} 3048 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 762x \equiv_{1778} 1270 \Leftrightarrow 762x - 1778k = 1270$ för något heltal k.
Euklides algoritm: $1778 = 762 \cdot 2 + 254$, $762 = 254 \cdot 3 + 0$, vilket ger
$\mathrm{sgd}(762, 1778) = 254$, så $\mathrm{sgd}(762, 1778) \mid 1270 = 254 \cdot 5$.
Ekvationen är därför lösbar och ekvivalent med $3x - 7k = 5$ ($\frac{762}{254} = 3$, $\frac{1778}{254} = 7$).
$7 = 3 \cdot 2 + 1$, så $1 = 3(-2) - 7(-1)$, så (multiplicera med 5) $x_0 = -10$, $k_0 = -5$ är en lösning till ekvationen. Om x, k är en lösning är $3(x - x_0) = 7(k - k_0)$, så ($\mathrm{sgd}(7, 3) = 1$) $7 \mid (x - x_0)$ och $x = x_0 + 7m = -10 + 7m$ för något heltal m. Alla sådana x ger också lösningar (med $k = -5 + 3m$) och genom att låta $m = n + 2$ får vi lösningarna på formen $x = 4 + 7n$, n godtyckligt heltal.
(Alt. Eulers metod: $2540x - 1778k = 3048 \Leftrightarrow k = x - 1 + \frac{762x - 1270}{1778}$, så x, k är en heltalslösning omm x och $y = \frac{762x-1270}{1778}$ är heltal, dvs $1778y - 762x = -1270$; x, y heltal, så omm $x = 2y + 1 + \frac{254y+508}{762}$, så x, y är en heltalslösning omm y och $z = \frac{254y+508}{762}$ är heltal, dvs $762z - 254y = 508$; y, z heltal omm $y = 3z - 2$, z heltal. Det ger $x = 2y + 1 + z = 2(3z - 2) + 1 + z = -3 + 7z$ etc.
Alt': $2540x \equiv_{1778} 3048$ är $254 \cdot 10 \cdot x \equiv_{254 \cdot 7} 254 \cdot 12 \Leftrightarrow 10x \equiv_7 3x \equiv_7 12 \equiv_7 5 \Leftrightarrow x \equiv_7 25 \equiv_7 4$.
Vid det andra '$\Leftrightarrow$' förlängdes med 5 ($= 3^{-1}$ i $\mathbb{Z}_7$).)

Svar: Alla sådana heltal är $\boldsymbol{x = 4 + 7n}$, $\boldsymbol{n}$ godtyckligt heltal.

5) (3p) Vi söker alla inverterbara element i $\mathbb{Z}_{14}$ och deras inverser.

Lösning:

x i $\mathbb{Z}_m$ är inverterbart omm $\mathrm{sgd}(x, m) = 1$, så ($14 = 2 \cdot 7$) inverterbara är de element i $\mathbb{Z}_{14}$ som inte är delbara med 2 eller 7, dvs 1, 3, 5, 9, 11, 13.
Inverserna kan bestämmas med Euklides algoritm (t.ex. $14 = 3 \cdot 4 + 2$, $3 = 2 \cdot 1 + 1$, så $1 = 3 - (14 - 4 \cdot 3) = -14 + 5 \cdot 3$ och $3 \cdot 5 = 1$ i $\mathbb{Z}_{14}$, $3^{-1} = 5$), eller genom att finna 3:s potenser: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27 = 13$, $3^4 = 11$, $3^5 = 5$, $3^6 = 1$ och notera att $3 \cdot 5 = 3^{1+5} = 1$, $9 \cdot 11 = 3^{2+4} = 1$, $13 \cdot 13 = 3^{3+3} = 1$, så $1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 5$, $5^{-1} = 3$, $9^{-1} = 11$, $11^{-1} = 9$, $13^{-1} = 13$.

Svar: Inverterbara är 1, 3, 5, 9, 11, 13 och deras inverser är
$\boldsymbol{1^{-1} = 1,\ 3^{-1} = 5,\ 5^{-1} = 3,\ 9^{-1} = 11,\ 11^{-1} = 9,\ 13^{-1} = 13}$.