

**Svar och lösningsförslag till ks5, 16 maj 2016,
i SF1662 Diskret matematik**

	sant	falskt
1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$)		
a) Två grafer med samma valenslista (samma antal hörn (noder) med valens (grad) i för alla $i \in \mathbb{N}$) är säkert isomorfa. [Nej. T.ex. C_6 och grafen med två komponenter C_3 är inte isomorfa.]		×
b) Om man från en cykel i en graf avlägsnar en kant, återstår en väg i grafen. [Ja, det blir en stig, som är en väg.]	×	
c) En sammanhängande bipartit $G = (X \cup Y, E)$ ($X \cap Y = \emptyset$, $e \in E \Rightarrow e \cap X = 1$) med $ X = Y $ är säkert hamiltonsk. [Nej. T.ex. C_4 med en kant borttagen är inte hamiltonsk.]		×
d) Den duala grafen till en (icke-tom) skog (dvs en graf vars alla komponenter är träd) som ritats plant, har precis ett hörn. [Ja. En skog saknar cykler, så $r = 1$ då den ritas plant.]	×	
e) Om grafen $G = (V, E)$ har kromatiskt tal $\chi(G) = 3$, måste $ E \geq 3$. [Ja. Om $ E = 0$ är $\chi(G) \leq 1$, om $ E = 1, 2$ är $\chi(G) = 2$ (tre fall).]	×	
f) Om en matchning i en graf är maximal, finns ingen alternerande stig som börjar och slutar i omatchade hörn. [Ja. Med en sådan stig kunde man konstruera en större matchning.]	×	

2a) (1p) Vi ska avgöra om grafen G :

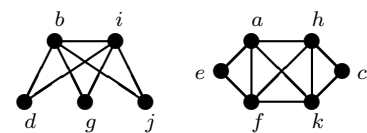
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
e	d	h	b	a	a	b	a	b	b	a
f	g	k	i	f	e	i	c	d	i	c
h	i				h		f	g		f
k	j				k		k	j		h

 med vidstående granntabell är eulersk.

Lösning:

Grafen kan ritas som i figuren. Den är alltså inte sammanhängande och har således ingen eulerkrets, är inte eulersk.

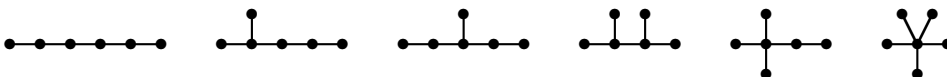
Svar: Grafen är inte eulersk.



b) (1p) Vi söker alla olika (icke-isomorfa) träd med precis 6 hörn och deras antal.

Lösning:

Om man i ordning söker träd med maxvalens 2–5 finner man alla möjligheter:



Svar: Det finns 6 olika (icke-isomorfa) sådana träd.

c) (1p) Vi skall definiera det kromatiska talet $\chi(G)$ för en graf $G = (V, E)$.

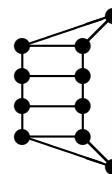
Lösning:

$\chi(G)$ är det minsta $n \in \mathbb{N}$, sådant att man kan "färga" G 's hörn med n färger så att alla grannar har olika färg, dvs det minsta $n \in \mathbb{N}$ sådant att det finns $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ med $\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

3) $G = (V, E)$ är en k -reguljär enkel graf. Vi söker (a, 1p) $e (= |E|)$ uttryckt i $v (= |V|)$ och k , (b, 1p) sambandet mellan v , k och r , då G är sammanhängande och utan korsande kanter kan dela in en sfäryta i r områden och (c, 1p) (grafer isomorfa med) alla möjliga G (som i b) då $r = 7$.

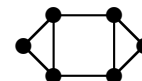
Lösning:

- a. Summan av valenserna är $2e$, så $2e = v \cdot k$, dvs $e = \frac{kv}{2}$.
 b. Eulers polyederformel (plan, sammanhängande graf), $v - e + r = 2$, ger med resultatet i a) att $v - \frac{kv}{2} + r = 2$, så $(k - 2)v = 2(r - 2)$.
 c. $r = 7$ ger $(k - 2)v = 10$. Enda sådana $k, v \in \mathbb{N}$ är $(k, v) = (12, 1), (7, 2), (4, 5), (3, 10)$. G enkel, k -reguljär ger $k \leq v - 1$, medan $k = 4, v = 5$ ger att G är K_5 (inte planär, så omöjlig). Enda återstående värdena är $k = 3, v = 10$ och de är möjliga, se figuren.



Svar a: $e = \frac{kv}{2}$, **b:** $(k - 2)v = 2(r - 2)$, **c:** Enda möjliga enligt figuren.

4) (3p) Vi söker antalet sätt att hörnfärga grafen till höger med högst 5 färger.



Lösning:

Om $P_G(\lambda)$ är grafens kromatiska polynom söker vi $P_G(5)$.
 $P_G(\lambda) = (\lambda - 2)^2 P_{C_4}(\lambda)$ (ty då C_4 i mitten har färgats har vart och ett av hörnen på sidorna $\lambda - 2$ färger att välja bland (dess båda grannar har ju säkert olika färger)).
 $P_{C_4}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ ($\lambda(\lambda - 1)^3 - \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ med rekursionsformeln; $\lambda(\lambda - 1)((\lambda - 2)^2 + 1 \cdot (\lambda - 1))$ "fall för fall"; $(\lambda - 1)^4 + (-1)^4(\lambda - 1)$ enligt formel från föreläsning).
 Det ger $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ och $P_G(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 13 = 2340$.

Svar: Antalet sådana färgningar är 2340.

- 5) (3p) $G = (X \cup Y, E)$ är en bipartit graf med $|X| = |Y| = 10$ och vi vet att
 1. alla $x \in X$ har $\delta(x) \geq 3$, 2. högst 3 st $x \in X$ har $\delta(x) < 6$,
 3. alla $y \in Y$ har $\delta(y) \geq 2$ och 4. högst 2 st $y \in Y$ har $\delta(y) < 4$.
 Vi ska avgöra om det måste finnas en fullständig matchning i G .

Lösning:

Enligt Halls ("giftermåls")sats finns en fullständig matchning omm för varje $A \subseteq X$ gäller att $|A| \leq |P(A)|$, där $P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$.
 Om $|A| = 0$ är ($A = \emptyset$ och) $|A| \leq |P(A)| (= 0)$.
 Om $|A| = 1, 2, 3$ är $|P(A)| \geq 3$ enligt 1.
 Om $|A| = 4, 5, 6$ är $|P(A)| \geq 6$ enligt 2.
 Om $|A| = 7, 8$ är $|P(A)| \geq 8$ enligt 4.
 Om $|A| = 9, 10$ är $|P(A)| = 10$ enligt 3.
 För alla $A \subseteq X$ är det alltså sant att $|A| \leq |P(A)|$, så det finns en fullständig matchning i G .

Svar: Ja, det måste finnas en fullständig matchning i G .