

Svar och lösningsförslag till ks3, 29 mars 2016,
i SF1662 Diskret matematik

	sant	falskt
1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p)		
a) Om man slår med två (ärliga) tärningar är sannolikheten $\frac{1}{4}$ att man får minst en 4:a och ingen 6:a. [Ja, 9 utfall är sådana, så sannolikheten är $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.]	×	
b) För alla ändliga mängder A och B är $ A \cup B - A = B $. [Nej, nej. $ A \cup B - A = B - A \cap B $.]		×
c) Om $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ är binomialtalet $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. [Nej, nämnaren ska vara $k! \cdot (n-k)!]$		×
d) Antalet sätt att fördela 20 identiska objekt i 5 olika lådor är lika med antalet injektioner $X \rightarrow Y$, $ X = 3$, $ Y = 23$. [Ja, faktiskt. De är $\binom{24}{4} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = (23)_3$.]	×	
e) Två permutationer $\alpha, \beta \in S_n$ är konjugerade omm $\sigma\alpha = \beta\sigma$ för något $\sigma \in S_n$ (permutationerna av $\{1, 2, \dots, n\}$). [Jadå. Ekvivalent med definitionen att $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$.]	×	
f) En permutation är udda omm antalet cykler av udda längd (i dess cykelform) är udda. [Nej, udda antal av jämn längd ska det vara.]		×

2a) (1p) Vi söker värdet av $11! \cdot \sum_{k=0}^{12} \frac{12^{13-k}}{k!} \cdot \frac{(-13)^k}{(12-k)!}$.

Lösning:

$$\begin{aligned} 11! \cdot \sum_{k=0}^{12} \frac{12^{13-k}}{k!} \cdot \frac{(-13)^k}{(12-k)!} &= \sum_{k=0}^{12} \frac{11!}{k! \cdot (12-k)!} \cdot 12 \cdot 12^{12-k} \cdot (-13)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 12^{12-k} (-13)^k = (12-13)^{12} = (-1)^{12} = 1 \text{ (enligt binomialsatsen).} \end{aligned}$$

Svar: Det sökta värdet är 1.

2b) (1p) Vi ska formulera postfacksprincipen.

Lösning:

”Om k föremål fördelas i n lådor, $k > n$, får minst en låda minst två föremål.”,
 ”Om $k > n$ finns ingen injektion från en k -mängd till en n -mängd.” e.dyl.

2c) (1p) $X = \{r, s, t, 1, 2, 3\}$. Vi söker antalet **ekvivalensrelationer** på X .

Lösning:

Eftersom ekvivalensrelationer på X enentydigt motsvarar partitioner av X är det sökta antalet $\sum_{k=1}^6 S(6, k)$, radsumman i den sjätte raden av "Stirlings triangel". Den är enligt triangeln t.h.

$$1 + 31 + \dots + 15 + 1 = 203.$$

Svar: Det finns 203 olika ekvivalensrelationer på X .

3) $A = \{a, b, c, d, e\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$. Vi söker antalet funktioner $X \rightarrow Y$, då X är mängden av surjektioner $A \rightarrow B$ och Y mängden av injektioner $B \rightarrow A$.

Lösning:

Eftersom $|A| = 5$ och $|B| = 3$ är

$|X| = 3! \cdot S(5, 3) = 6 \cdot 25 = 150$ (surjektioner 5-mängd $\rightarrow$ 3-mängd,

se delen av "Stirlings triangel" t.h.) och

$|Y| = (5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (injektioner 3-mängd $\rightarrow$ 5-mängd).

Antalet funktioner $X \rightarrow Y$ är alltså 60^{150} (funktioner 150-mängd $\rightarrow$ 60-mängd).

Svar: Antalet sådana funktioner är $60^{150} (\approx 5,28 \cdot 10^{266})$.

4) $\pi, \sigma \in S_7$ ges av $\pi = (\frac{1}{7} \frac{2}{1} \frac{3}{6} \frac{4}{4} \frac{5}{2} \frac{6}{3} \frac{7}{5})$, $\sigma = (\frac{1}{6} \frac{2}{2} \frac{3}{7} \frac{4}{5} \frac{5}{1} \frac{6}{4} \frac{7}{3})$. Vi ska (a, 2p) ange π , π^{-1} och $\pi\sigma$ på cykelform och (b, 1p) finna ett $\tau \in S_7$ sådant att $\tau\pi$ har ordning 12.

Lösning:

a. $\pi(1) = 7, \pi(7) = 5, \pi(5) = 2, \dots$ ger i cykelform $\pi = (1\ 7\ 5\ 2)(3\ 6)(4)$, så (cyklerna baklänges) $\pi^{-1} = (1\ 2\ 5\ 7)(3\ 6)(4)$.

P.s.s. $\sigma = (1\ 6\ 4\ 5)(2)(3\ 7)$ och $\pi\sigma = (1\ 7\ 5\ 2)(3\ 6)(1\ 6\ 4\ 5)(3\ 7) = (1\ 3\ 5\ 7\ 6\ 4\ 2)$.

b. Eftersom $o(\tau\pi) = \text{mgm av dess cykellängder} = 12$, måste en cykellängd vara delbar med 3 och en med 4. Enda möjliga typen för $\tau\pi$ är [34]. **T.ex.** kan man ta $\tau\pi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$, dvs $\tau = (\tau\pi)\pi^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(1\ 2\ 5\ 7)(3\ 6) = (1\ 3\ 7\ 2\ 6\ 4)(5)$.

Svar a: $\pi = (1\ 7\ 5\ 2)(3\ 6)$, $\pi^{-1} = (1\ 2\ 5\ 7)(3\ 6)$ och $\pi\sigma = (1\ 3\ 5\ 7\ 6\ 4\ 2)$,

b: **T.ex.** $\tau = (1\ 3\ 7\ 2\ 6\ 4)$. (Det går förstås också bra att skriva ut 1-cyklerna.)

5) (3p) Lisa och Pelle har 46 böcker med våldsinslag, 88 st med inslag av kärlek och 49 st med matematikinslag. Totalt har 149 böcker minst ett av dessa tre inslag och bara 3 st har alla tre. Vidare har 7 av böckerna inslag både av matematik och våld och 19 st av både kärlek och våld. Vi söker antalet av deras böcker som innehåller både matematik och kärlek, men inget våld.

Lösning:

Kalla mängden böcker med kärleksinslag K , med matematik M , med våld V . Givet är att $|K \cup M \cup V| = 149$, $|K| = 88$, $|M| = 49$, $|V| = 46$, $|K \cap V| = 19$, $|M \cap V| = 7$, $|K \cap M \cap V| = 3$.

Principen om inklusion och exklusion ger att

$|K \cup M \cup V| = |K| + |M| + |V| - |K \cap M| - |K \cap V| - |M \cap V| + |K \cap M \cap V|$, så $149 = 88 + 49 + 46 - |K \cap M| - 19 - 7 + 3$, så $|K \cap M| = 11$ och det sökta antalet $|(K \cap M) \setminus V| = |K \cap M| - |K \cap M \cap V| = 11 - 3 = 8$.

Svar: 8 av böckerna innehåller matematik, kärlek och inget våld.