Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 22 februari 2016, i SF1662 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)	**sant**	**falskt**
a) Det finns precis två olika talföljder $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller $a_0 = 3$ och $(a_{n+1})^2 = (a_n)^2$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ [Nej, många fler ($\lvert\mathbb{R}\rvert$ st). Varje $a_1, a_2, \ldots$ kan vara antingen 3 eller -3.]		×
b) För alla mängder A, B är $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. [Ja, $X \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow (X \subseteq A$ och $X \subseteq B)$.]	×	
c) $\neg(A \to \neg B) \vDash B$ för atomära sentenser A, B. [Ja, $\neg(A \to \neg B) : 1$ (dvs $A \to \neg B : 0$) bara för tolkningen $A : 1,\ B : 1$.]	×	
d) Låt $\mathcal{E}$ vara en ekvivalensrelation på mängden X. Om $a, b, c \in X$ uppfyller $a\,\mathcal{E}\,b$ och $a\,\mathcal{E}\,c$, så måste $c\,\mathcal{E}\,b$. [Ja, symmetri ger $c\,\mathcal{E}\,a$, så transitivitet ger $c\,\mathcal{E}\,b$.]	×	
e) Sammansättning av en injektion $f : X \to Y$ och en surjektion $g : Y \to Z$ ger säkert en bijektion $gf : X \to Z$. [Nej. Ett motex: $X = \{1\}, Y = Z = \{1, 2\}, f(1) = 1, g = id$.]		×
f) Det existerar en surjektion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. [Jadå, $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Q}$ är båda uppräkneliga, så det finns en bijektion, som ju är en surjektion.]	×	

2a) (1p) Vi ska avgöra om det är möjligt att $b \preceq c$ då $\preceq$ är en partialordning på mängden X, $a, b, c \in X$, $a \preceq b$ och $a \not\preceq c$.

Lösning:

Eftersom $\preceq$ är en partialordning är den en transitiv relation, så $a \preceq b$, $b \preceq c$ skulle ge $a \preceq c$ (vilket motsäger förutsättningarna), så det kan inte vara så.

Svar: Nej, det är inte möjligt att $b \preceq c$.

2b) (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f : X \to Y$ är en **surjektion**.

Lösning:

f är surjektiv omm för varje $y \in Y$ finns (minst) ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$.

2c) (1p) Vi skall ange en överuppräknelig mängd.

Lösning:

Ett standardexempel är $\mathbb{R}$, de reella talen (boken s. 30). Det går (enligt Cantors sats) också bra med $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (liksom $\mathcal{P}(X)$ för en godtycklig oändlig mängd X).

Svar: T.ex. $\mathbb{R}$ eller $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$.

3) Vi skall avgöra om relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, för $A, B \in \mathcal{X}$ given av $A \,\mathcal{R}\, B$ omm $|A \setminus B| < \infty$, är (a, 1p) reflexiv, (b, 1p) symmetrisk och (c, 1p) transitiv.

Lösning:

a. $\mathcal{R}$ är reflexiv omm $A \,\mathcal{R}\, A$, dvs $A \setminus A\,(=\varnothing)$ är ändlig, för alla $A \in \mathcal{X}$. Eftersom $|\varnothing| = 0$ är $\mathcal{R}$ reflexiv.
b. $\mathcal{R}$ är symmetrisk omm $A \,\mathcal{R}\, B \Rightarrow B \,\mathcal{R}\, A$ för alla $A, B \in \mathcal{X}$, dvs omm $A \setminus B$ ändlig $\Rightarrow B \setminus A$ ändlig. Om $A = \varnothing$ och $B = \mathbb{Z}$ är $A \setminus B = \varnothing$ ändlig, men $B \setminus A = \mathbb{Z}$ oändlig, så $\mathcal{R}$ är inte symmetrisk.
c. $\mathcal{R}$ är transitiv omm $(A \,\mathcal{R}\, B$ och $B \,\mathcal{R}\, C) \Rightarrow A \,\mathcal{R}\, C$ för alla $A, B, C \in \mathcal{X}$.
Men $A \setminus C$ består precis av dels de A-element som varken ligger i B eller C och dels de A-element som ligger i B men inte i C ($A \setminus C = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C$, venndiagram eller boolesk algebra). De första är ändligt många om $|A \setminus B| < \infty$ ($A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B$) och de andra om $|B \setminus C| < \infty$ ($(A \cap B) \setminus C \subseteq B \setminus C$), så $\mathcal{R}$ är transitiv (ty unionen av två ändliga mängder är ändlig).

Svar: $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ är a: reflexiv, b: inte symmetrisk, c: transitiv.

---

4) (3p) Vi skall med naturlig deduktion visa $(A \wedge B) \to \neg C \vdash C \to (B \to \neg A)$.
Givna härledningsregler: premiss, antagande, DN, $\wedge$E, $\wedge$I, $\to$E, $\to$I, $\neg$E, $\neg$I.

Lösning:

1	(1)	$(A \wedge B) \to \neg C$	premiss	
2	(2)	C	antagande (för $\to$I)	
3	(3)	B	antagande (för $\to$I)	
4	(4)	A	antagande (för $\neg$I)	
3,4	(5)	$A \wedge B$	4,3 $\wedge$I	
1,3,4	(6)	$\neg C$	1,5 $\to$E	
1,2,3,4	(7)	$\perp$	6,2 $\neg$E	
1,2,3	(8)	$\neg A$	4,7 $\neg$I	
1,2	(9)	$B \to \neg A$	3,8 $\to$I	
1	(10)	$C \to (B \to \neg A)$	2,9 $\to$I	

Saken är klar, ty rätt slutsats på rad 10 beror bara av premissen på rad 1.

---

5) (3p) Vi skall visa $0^2 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n\, n^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2}$ för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Låt $P(n)$ vara påståendet $0^2 - 1^2 + 2^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2}$.
Vi använder matematisk induktion för att visa $P(n)$ för $n \in \mathbb{N}$.
Bas: $\mathrm{VL}_0 = 0^2 = 0$, $\mathrm{HL}_0 = (-1)^0\, \frac{0(0+1)}{2} = 0$, så $P(0)$ är sann. **Basen är klar**.
Steg: Låt $k \in \mathbb{N}$ och antag $P(k)$. Då är
$\mathrm{VL}_{k+1} = 0^2 - 1^2 + \ldots + (-1)^k k^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = \mathrm{VL}_k + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \overset{\text{ind.ant.}}{=}$
$= \mathrm{HL}_k + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 =$
$= (-1)^{k+1}(k+1)(-\frac{k}{2} + (k+1)) = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \mathrm{HL}_{k+1}$,
så $P(k+1)$ är sann om $P(k)$ är det.
Vi har därmed visat $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$. **Steget är klart**.
Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$. **Saken är klar**.