

Efternamn, förnamn	personnummer	program	blad	uppg.
			1	1

Matematik, KTH

B.Ek

**Kontrollskrivning 2, må 22 februari 2016, 8.00–10.00,
i SF1662, Diskret matematik**

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga (utom penna och sudd), inte ens räknedosa.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

För in dina svar på uppgift 1 i rutorna nedan och lämna in detta blad tillsammans med övriga lösningsblad.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

- a) Det finns precis två olika talföljder $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller $a_0 = 3$ och $(a_{n+1})^2 = (a_n)^2$ för $n = 0, 1, 2, \dots$
- b) För alla mängder A, B är $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
($\mathcal{P}(X)$ är som vanligt X :s potensmängd, $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.)
- c) $\neg(A \rightarrow \neg B) \models B$ för atomära sentenser A, B
(dvs varje tolkning som gör $\neg(A \rightarrow \neg B)$ sann gör B sann).
- d) Låt $\mathcal{E}$ vara en ekvivalensrelation på mängden X .
Om $a, b, c \in X$ uppfyller $a \mathcal{E} b$ och $a \mathcal{E} c$, så måste $c \mathcal{E} b$.
- e) Sammansättning av en injektion $f : X \rightarrow Y$ och en surjektion $g : Y \rightarrow Z$ ger säkert en bijektion $gf : X \rightarrow Z$.
- f) Det existerar en surjektion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$.
($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ är som vanligt mängderna av alla heltal respektive rationella tal.)

sant	falskt

Vänd!

Lösningar på följande uppgifter skrivs på separata papper.

2a) (1p) Låt $\preceq$ vara en partialordning på mängden X och $a, b, c \in X$.

Om $a \preceq b$ och $a \not\preceq c$ (dvs inte $a \preceq c$), kan $b \preceq c$?

Ge exempel på sådana $X, a, b, c, \preceq$ eller förklara varför inga finns.

b) (1p) Låt X och Y vara mängder. Vad betyder det (dvs hur definieras) att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **surjektion**?

c) (1p) Ge ett exempel på en **överuppräknelig** mängd (dvs en oändlig mängd som inte är uppräknelig).

3) Låt $\mathcal{X}$ vara $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ($= \{A \mid A \subseteq \mathbb{Z}\}$) och betrakta den relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{X}$ som för $A, B \in \mathcal{X}$ (dvs för godtyckliga mängder A och B av heltal) ges av

$A \mathcal{R} B$ om och endast om $A \setminus B$ är en ändlig mängd.

(Minns att $A \setminus B = A \cap B^c$.) I svaren på a)-c) skall tydligt framgå vad det innebär att en relation har respektive egenskap och motiveras att $\mathcal{R}$ har den eller inte.

a) (1p) Är $\mathcal{R}$ **reflexiv**?

b) (1p) Är $\mathcal{R}$ **symmetrisk**?

c) (1p) Är $\mathcal{R}$ **transitiv**?

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$(A \wedge B) \rightarrow \neg C \vdash C \rightarrow (B \rightarrow \neg A).$$

Endast härledningsreglerna på det utdelade bladet får användas.

Observera att varje steg i härledningen måste motiveras med en regel från listan.

Det är alltså inte tillåtet att "forma om" sentenser med t.ex. boolesk algebra eller dra "uppenbara" slutsatser utan att redovisa vilka härledningsregler som använts.

5) (3p) Visa med matematisk induktion att för $n = 0, 1, 2, \dots$ är

$$0^2 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Glöm inte att motivera ordentligt.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.

NÅGRA HÄRLEDNINGSREGLER FÖR NATURLIG DEDUKTION

Regel för premiss

$j \quad (j) \quad p \quad \text{premiss}$

Regel för antagande

$j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$

Regel för $\wedge$ E:

$a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad p \wedge q$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \wedge E$
 (eller q)

Regel för $\rightarrow$ E:

$a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \rightarrow q$
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \quad j, k \rightarrow E$

Regel för $\neg$ E:

$a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad \neg p$
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \perp \quad j, k \neg E$

DN-regeln

$a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \neg \neg p$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad DN$

Regel för $\wedge$ I:

$a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p$
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad q$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad p \wedge q \quad j, k \wedge I$

Regel för $\rightarrow$ I:

$j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad q$
 $\vdots$
 $\{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad p \rightarrow q \quad j, k \rightarrow I$

Regel för $\neg$ I:

$j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \perp$
 $\vdots$
 $\{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad \neg p \quad j, k \neg I$