Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 8 februari 2016,
i SF1662 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om a, b är heltal, $b \neq 0$, ger division av a med b säkert samma principala rest som division av $a + b$ med b. [Ja. $a = bq + r \Leftrightarrow a + b = b(q + 1) + r$.]	X	
b) Om a, b är heltal och p är ett primtal med $p \mid ab$, så är säkert en av $p \mid a$ och $p \mid b$ sann och en falsk. [Nej. Om t.ex. $a = b = p$ gäller $p \mid ab$ och både $p \mid a$ och $p \mid b$.]		X
c) Om $\mathrm{sgd}(m, n) = \mathrm{mgm}(m, n)$ gäller för heltalen m och n, måste $m = n$. [Nej. $m = -n \neq 0$ är också möjligt.]		X
d) För a, b heltal med $a \equiv_{84} b$ gäller säkert $a \equiv_{14} b$, $a \equiv_6 b$. [Ja. $84 \mid (a - b) \Rightarrow (a - b) = 84k$ (k heltal) $\Rightarrow 14 \mid (a - b)$, $6 \mid (a - b)$.]	X	
e) För a, b heltal med $a \equiv_{14} b$, $a \equiv_6 b$ gäller säkert $a \equiv_{84} b$. [Nej. Motex: $a = 42$, $b = 0$.]		X
f) I $\mathbb{Z}_{101}$ är $3 \cdot 4^{-1} + 34 = 60$. [Ja. $3 \cdot 4^{-1} + 34 = 3 \cdot 76 + 34 = 228 + 34 = 262 = 60$ i $\mathbb{Z}_{101}$. Alt. $3 \cdot 4^{-1} + 34 = 60 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-1} = 26 \Leftrightarrow 3 = 26 \cdot 4$ (ty $\mathrm{sgd}(4, 101) = 1$, så 4^{-1} existerar).]	X	

2a) (1p) Vi ska avgöra om det finns heltal x, y med $10\,530x + 153\,000y = 90\,900$.
($10\,530 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13,\ 153\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 17,\ 90\,900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 101$.)

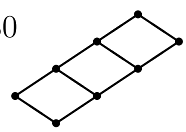
Lösning:

Sådana x, y finns (enligt känd sats) omm $\mathrm{sgd}(10\,530, 153\,000) \mid 90\,900$.
Men $\mathrm{sgd}(10\,530, 153\,000) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \mid 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 101 = 90\,900$, så de finns.

Svar: Ja, sådana heltal x, y finns.

---

b) (1p) Vi söker det/de av talen 24, 25, 26, 27, 28, 29 och 30 som vidstående figur kan bli en delargraf för.



Lösning:

Direkt över nedersta punkten står två punkter, så talet skall ha precis två olika primfaktorer (så 25, 27, 29 och 30 är uteslutna). Eftersom det skall ha precis 8 positiva delare (det själv medräknat) måste den ena faktorn förekomma 1 gång och den andra 3 gånger. Det stämmer för 24, men inte för 26 eller 28.
Med talen (uppifrån, vänster till höger) 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1 fås delargrafen för 24.

Svar: Figuren kan bara vara delargraf för 24 (bland de givna talen).

---

c) (1p) Vi söker den principala resten då $(123\,456\,246)_7$ divideras med 6.

Lösning:

$(123\,456\,246)_7 = 1 \cdot 7^8 + 2 \cdot 7^7 + \ldots + 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 6 \equiv_6 1 \cdot 1^8 + 2 \cdot 1^7 + \ldots + {}$
${} + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 1 + 2 + \ldots + 2 + 4 + 6 = 33 \equiv_6 3$, så den sökta resten är 3.

Svar: Den sökta principala resten är 3.

3) Vi söker (a, 1p) alla inverterbara element i $\mathbb{Z}_{24}$ och (b, 2p) 13^{-1} i $\mathbb{Z}_{35}$.

Lösning:

a. x i $\mathbb{Z}_m$ är inverterbart omm $\mathrm{sgd}(x, m) = 1$, så $(24 = 2^3 \cdot 3)$ inverterbara är de element i $\mathbb{Z}_{24}$ som inte är delbara med 2 eller 3, dvs 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
b. 13^{-1} fås med Euklides algoritm: $35 = 13\cdot 2+9$, $13 = 9\cdot 1+4$, $9 = 4\cdot 2+1$, så $1 = 9-2\cdot 4 = 9-2(13-9) = -2\cdot 13+3\cdot 9 = -2\cdot 13+3(35-2\cdot 13) = 3\cdot 35-8\cdot 13$ och $13^{-1} = -8 = 35-8 = 27$ i $\mathbb{Z}_{35}$.

Svar a: Inverterbara i $\mathbb{Z}_{24}$ är 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
b: $13^{-1} = 27$ i $\mathbb{Z}_{35}$.

---

4) (3p) Vi söker alla heltal x som uppfyller $39x \equiv 6 \pmod{48}$.

Lösning:

$39x \equiv 6 \pmod{48} \Leftrightarrow 39x + 48k = 6$ för något heltal k. Vi löser denna diofantiska ekvation (och är bara intresserade av x).
Euklides: $48 = 39 \cdot 1 + 9$, $39 = 9 \cdot 4 + 3$, $9 = 3 \cdot 3 + 0$, så $\mathrm{sgd}(39, 48) = 3$ och ekvationen är ekvivalent med (dividera med 3) $13x + 16k = 2$. Ur beräkningen nyss fås $16 = 13\cdot 1+3$, $13 = 3\cdot 4+1$ och därur $1 = 13-4\cdot 3 = 13-4(16-13) = -4\cdot 16+5\cdot 13$. Förlängning med 2 ger $13\cdot 10+16(-8) = 2$, så $x_0 = 10$, $k_0 = -8$ är en lösning. Om x, y är en lösning fås $13(x-10) + 16(k+8) = 0$.
Eftersom $\mathrm{sgd}(13, 16) = 1$ ger det att $x - 10 = 16n$ för något heltal n och alla dessa x ger också lösningar.
(Alt. Eulers metod: $39x + 48k = 6 \Leftrightarrow x = -k + \frac{6-9k}{39}$, så x, k är en heltalslösning omm k och $y = \frac{6-9k}{39}$ är heltal, omm $9k + 39y = 6$, k, y heltal, omm $k = -4y + \frac{6-3y}{9} = -4y + z$ och y är heltal, omm $3y + 9z = 6$, y, z heltal, omm $y = 2 - 3z$, z heltal. Så omm $k = -4(2-3z) + z = -8 + 13z$ och $x = -(-8 + 13z) + (2 - 3z) = 10 - 16z$, z godtyckligt heltal.
Alt': $39x \equiv_{48} 6 \Leftrightarrow 13x \equiv_{16} 2 \Leftrightarrow 65x \equiv_{16} x \equiv_{16} 10$. I sista steget förlängdes med 5 (13^{-1} i $\mathbb{Z}_{16}$).)

Svar: Alla sådana heltal är $x = 10 + 16n$, n godtyckligt heltal.

---

5) (3p) Vi skall faktorisera $a = 11\,557$ och $b = 13\,081$ i primtal, genom att använda att a och b inte är relativt prima.

Lösning:

För att få en faktor söker vi $\mathrm{sgd}(a, b)$.
Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 13\,081 = 11\,557 \cdot 1 + 1\,524, \\ 11\,557 = 1\,524 \cdot 7 + 889, \\ 1\,524 = 889 \cdot 1 + 635, \\ 889 = 635 \cdot 1 + 254, \\ 635 = 254 \cdot 2 + 127, \\ 254 = 127 \cdot 2 + 0, \end{cases}$$

så $\mathrm{sgd}(13\,081, 11\,557) = 127$, ett primtal (ty $2, 3, 5, 7, 11 \nmid 127$ och $13^2 > 127$).
Division ger $a = 91 \cdot 127$, men $91 = 7 \cdot 13$, där 7 och 13 är primtal.
P.s.s. $b = 103 \cdot 127$. 103 är ett primtal, ty $2, 3, 5, 7 \nmid 103$ och $11^2 > 103$.
(Vi använde att primtalen börjar med 2, 3, 5, 7, 11, 13.)

Svar: Primfaktoriseringarna är $a = 7 \cdot 13 \cdot 127$, $b = 103 \cdot 127$.
