

**Svar och lösningsförslag till ks5, 18 maj 2015,
i SF1662 Diskret matematik**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Två grafer med samma grannmatris är säkert isomorfa. [Ja. Bijektionen mellan hörn som hör till samma rad är en isomorfi.]	×	
b) Om grafen G är 2-reguljär är den säkert isomorf med en cykelgraf C_n (dvs hörn och kanter i en regelbunden n -hörning). [Nej, men varje komponent i G är det.]		×
c) Om en graf har en hamiltoncykel är den säkert bipartit. [Nej, inte alls. T.ex. K_n för $n \geq 3$ är hamiltonsk, men inte bipartit.]		×
d) Om varje komponent i en graf har högst 5 hörn (noder) och högst 9 kanter så är den säkert planär. [Ja. Varken K_5 (10 kanter) eller $K_{3,3}$ (6 hörn) ryms i någon komponent (Kuratowski).]	×	
e) En graf $G = (V, E)$ är bipartit om och endast om dess kromatiska tal $\chi(G) = 2$. [Nej. Om $E = \emptyset$ är $\chi(G) = 1$.]		×
f) Om en graf G har kromatiskt polynom $P_G(\lambda)$ och $n \in \mathbb{N}$ gäller säkert att $P_G(n) \neq 0 \Rightarrow P_G(n+1) \neq 0$. [Ja. En hörfärgning med högst n färger är ju en med högst $n+1$ färger.]	×	

2a) (1p) Vi skall avgöra om G_1 :	a	b	c	d	e	f	G_2 :	1	2	3	4	5	6
G_1 och G_2 är isomorfa och i så	d	d	d	a	a	a		2	1	4	2	3	2
fall finna en isomorfi.	e		e	b	c				4	5	3		3
	f			c					6	6			

Lösning:

I en isomorfi måste a, d i G_1 motsvara 2, 3 i G_2 (alla hörn med valens 3), men a, d är grannar och 2, 3 inte, så G_1, G_2 är inte isomorfa (trots samma valenslista).

Svar: Graferna är inte isomorfa.

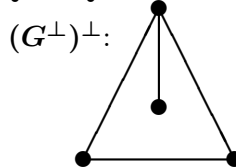
b) (1p) Vi söker $(G^\perp)^\perp$ till den plana grafen G i figuren.

G :



Lösning:

$G^\perp$ har två hörn, förbundna med tre kanter, och ett av hörnen har en ögla. $(G^\perp)^\perp$ får fyra hörn med kanter motsvarande $G^\perp$:s. Den kan ritas som i den nedre figuren (så den är " G med komponenterna hopkopplade").



c) (1p) Vi skall uttrycka $P_G(\lambda)$ ($G = (V, E)$, $E \neq \emptyset$) med kromatiska polynom för grafer med färre kanter.

Lösning:

$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$, där $e \in E$ och $G - e$ och G/e är graferna som fås från G då e tas bort respektive kontraheras ("dras ihop").

3) (3p) Grafen $G = (V, E)$ har en k -reguljär komponent med precis en fjärdedel av G 's hörn och hälften av dess kanter. Övriga komponenter har exakt en cykel var. Vi skall (a, 2p) finna alla möjliga värden på k och (b, 1p) avgöra om G 's k -reguljära komponent måste vara eulersk.

Lösning:

a. Låt $v = |V|$ och $e = |E|$. Varje komponent med precis en cykel har lika många hörn som kanter (en kant mer än ett träd med samma antal hörn). Hörnen i dessa komponenter är alltså lika många som kanterna där, $v - \frac{v}{4} = \frac{e}{2}$, så $2e = 3v$.

I den k -reguljära komponenten är summan av valenserna = dubbla antalet kanter, så $k \cdot \frac{v}{4} = 2 \cdot \frac{e}{2}$, vilket ger $\frac{k}{2}v = 2e (= 3v)$. $v \neq 0$, så $k = 6$.

b. Den k -reguljära komponenten är sammanhängande och alla hörn har jämn valens. Enligt en känd sats av Euler är den eulersk.

Svar a: $k = 6$ är enda möjligheten, b: Den är eulersk.

4) (3p) Vi söker antalet ytor en sfärs yta delas in i av en sammanhängande plan graf som har 2 hörn med valens 2, 12 hörn med valens 3, 3 hörn med valens 4 och 2 hörn med valens 6 (och inga andra hörn).

Lösning:

Enligt Eulers polyederformel (G är plan och sammanhängande) är $v - e + r = 2$ (med vanliga beteckningar). Dessutom är $2e = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 64$. $v = 2 + 12 + 3 + 2 = 19$ och $e = 32$ ger $r = 2 - v + e = 2 - 19 + 32 = 15$.

Svar: Antalet områden blir 15.

5) I $G = (X \cup Y, E)$ med $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $E = \{a2, a4, b1, b3, c1, c2, d3, d5, e3\}$ är matchningen $M = \{a2, b1, d3\}$ given. Vi skall dels (a, 2p) finna en utökande alternerande stig till M och motsvarande större matchning M' och dels (b, 1p) avgöra om G har någon fullständig matchning.

Lösning:

a. Man finner utökande alternerande stigar (dvs alternerande stigar som börjar och slutar i omatchade hörn) **$c1b3d5$** , **$c2a4$** och **$e3d5$** (utgå från ett omatchat hörn och finn systematiskt alla möjliga alternerande stigar som leder till ett omatchat hörn). De ger matchningar respektive **$\{a2, b3, c1, d5\}$** , **$\{a4, b1, c2, d3\}$** , **$\{a2, b1, d5, e3\}$** . (M' består av de kanter som ingår i precis en av M och den utökande alternerande stigen.)

b. Också i de olika M' finns utökande alternerande stigar (**$e3b1c2a4$** , **$e3d5$** , **$c2a4$**). De ger nya matchningar M'' som är större än sina M' , dvs fullständiga. (M'' blir i själva verket i alla fallen **$\{a4, b1, c2, d5, e3\}$** , G 's enda fullständiga matchning).

Svar a: Stigar och matchningar som ovan (ett alternativ räcker), b: Ja.
