

**Svar och lösningsförslag till ks3, 25 mars 2015,
i SF1662 Diskret matematik**

- 1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

- a) Om man slår med två (ärliga) tärningar är sannolikheten $\frac{2}{3}$ att ingen av dem visar 1 eller 2.
[Nej, den är $(\frac{2}{3})^2$. Den är $\frac{2}{3}$ för varje tärning.]
- b) Om 11 personer tävlar i kombinatorik kan 1:a, 2:a och 3:e-priserna fördelas (till olika tävlande) på 999 sätt.
[Nej, injektioner priser $\rightarrow$ tävlande, så på $(11)_3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ sätt.]
- c) Binomialtalet $\binom{2n}{n}$ är för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ ett jämnt tal.
[Ja. $\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1}$, ty $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.]
- d) Antalet surjektioner från en n -mängd till en k -mängd är $k \cdot S(n, k)$ (där $S(n, k)$ betecknar ett stirlingtal av andra slaget).
[Nej, $k! \cdot S(n, k)$ skall det vara.]
- e) Varje $\pi \in S_n$ (permutationerna av $\{1, 2, \dots, n\}$) är en **injektion** $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.
[Jadå. En permutation är en bijektion, så också en injektion.]
- f) Om $n \geq 2$ är precis hälften av **transpositionerna** i S_n jämna permutationer.
[Nej. Alla transpositioner är udda permutationer (och de finns).]

sant	falskt
	×
	×
×	
	×
×	
	×

- 2a) (1p) Vi söker koefficienten för x^9y^7 i utvecklingen av $(2x + 3y)^{16}$.

Lösning:

Enligt binomialsatsen är termerna i utvecklingen $\binom{16}{k} \cdot (2x)^{16-k} \cdot (3y)^k$ för $k = 0, 1, \dots, 16$. För $k = 7$ fås den sökta koefficienten $\binom{16}{7} \cdot 2^9 \cdot 3^7 = \frac{16! \cdot 2^9 \cdot 3^7}{7! \cdot 9!}$

Svar: Den sökta koefficienten är $\frac{16! \cdot 2^9 \cdot 3^7}{7! \cdot 9!} (= 12\,809\,871\,360)$.

- b) (1p) Var och en av 60 lådor får 3 kulor med olika färger, av åtta. Vi skall avgöra om det måste finnas (minst) två lådor med samma kulfärger.

Lösning:

Antalet olika färgkombinationer är $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$, så alla lådorna kan inte ha olika (lådorna som brev och färgkombinationerna som postfack).

Svar: Ja, det måste finnas minst två lådor med samma färger.

- c) (1p) Vi söker ett **udda** $\pi \in S_9$ med $\pi^2 \neq id$ och $\pi^{10} = id$.

Lösning:

$o(\pi) \mid 10$ och $o(\pi) \neq 1, 2, 5$ (π udda $\Rightarrow \pi, \pi^5 \neq id$ (ty π^5 udda), $\pi^2 \neq id$ givet), så $o(\pi) = 10 = \text{mgm av cykellängderna}$. Eftersom $9 < 10 = 2 \cdot 5$ har π minst en 2-cykel och en 5-cykel, i övrigt bara 1-cykler. Enda möjligheten (med ett udda antal 2-cykler (π udda)) är tydligen cykelstrukturen $[1^2 2 5]$.

Svar: π kan t.ex. vara $\pi = (1)(2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$.

3) (3p) Vi söker antalet sätt att fördela 113 identiska guldmynt bland 10 sjörövare, då kaptenen skall ha minst 5 mynt och övriga minst 2 mynt var.

Lösning:

Efter att de obligatoriska 23 mynten delats ut skall återstående 90 mynt fördelas fritt på 10 rövare. Oordnat (identiska mynt) val av sjörövare för varje mynt, med upprepning tillåten (varje rövare kan få flera mynt). Sådana fördelningar svarar bijektivt mot val av 9 väggar bland $90 + 9$ "väggmynt", så det sökta antalet är $\binom{99}{9} = \frac{99!}{9!90!}$.

Svar: Mynten kan fördelas på $\frac{99!}{9!90!}$ (= 1 731 030 945 644) sätt.

4) $\pi, \sigma \in S_8$ ges av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi söker (a, 2p) π^{-1} och $\pi\sigma$ i cykelform och

(b, 1p) x, y, z sådana att $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 2 & x & y & z & 6 & 3 \end{pmatrix}$ är $\rho\pi\rho^{-1}$ för ett $\rho \in S_8$.

Lösning:

a) $\pi(1) = 6, \pi(6) = 2, \pi(2) = 1, \dots$ ger i cykelform $\pi = (1\ 6\ 2)(3\ 7)(4\ 8)(5)$, så (cyklerna baklänges) $\pi^{-1} = (1\ 2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)(5)$.

P.s.s. $\sigma = (1\ 5\ 3\ 8)(2\ 7\ 4\ 6)$. Det ger $\pi\sigma = (1\ 6\ 2)(3\ 7)(4\ 8)(1\ 5\ 3\ 8)(2\ 7\ 4\ 6) = (1\ 5\ 7\ 8\ 6)(2\ 3\ 4)$.

b) τ och π är konjugerade, så τ har samma cykelstruktur som π , $[1\ 2^2\ 3]$. τ har en 3-cykel $(2\ 8\ 3)$ och paren $\{1, 5\}$ och $\{7, 6\}$ ingår i samma (2-)cykler. Det ger $x = 4, y = 1, z = 7$.

Svar a: $\pi^{-1} = (1\ 2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$ och $\pi\sigma = (1\ 5\ 7\ 8\ 6)(2\ 3\ 4)$,

b: $x = 4, y = 1, z = 7$.

5) (3p) Vi söker antalet personer som är med i precis två av K, A och G , då vi vet att 25 är med i K , 32 är med i A , 27 är med i G , 49 är med i minst en av K, A, G och 8 är med i alla tre.

Lösning:

Låt som vanligt $\alpha_1 = |K| + |A| + |G| (= 25 + 32 + 27 = 84)$,

$\alpha_2 = |K \cap A| + |A \cap G| + |G \cap K|$ och $\alpha_3 = |K \cap A \cap G| (= 8)$.

Antalet som är med i K och A , men inte G , är $|K \cap A| - |K \cap A \cap G|$ och p.s.s. för övriga par. Det sökta antalet är alltså $|K \cap A| - |K \cap A \cap G| + |A \cap G| - |K \cap A \cap G| + |G \cap K| - |K \cap A \cap G| = \alpha_2 - 3\alpha_3$.

Principen om inklusion och exklusion ger att $|K \cup A \cup G| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, så $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 - |K \cup A \cup G| = 84 + 8 - 49 = 43$.

Det sökta antalet är alltså $43 - 3 \cdot 8 = 19$.

Svar: Antalet personer som är med i precis två av klubbarna är 19.
