

**Matematik, KTH**

B.Ek

| Efternamn | förnamn | personnr |
|-----------|---------|----------|
|           |         |          |

**Kontrollskrivning 3, on 25 mars 2015, 8.30–10.00,  
i SF1662 Diskret matematik**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd (3p) uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

**1)** (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

| poäng<br>uppg.1 |
|-----------------|
|                 |

|                                                                                                                                                             | sant | falskt |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--------|
| <b>a)</b> Om man slår med två (ärliga) tärningar är sannolikheten $\frac{2}{3}$ att ingen av dem visar 1 eller 2.                                           |      |        |
| <b>b)</b> Om 11 personer tävlar i kombinatorik kan 1:a, 2:a och 3:e-priserna fördelas (till olika tävlande) på 999 sätt.                                    |      |        |
| <b>c)</b> Binomialtalet $\binom{2n}{n}$ är för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ ett jämnt tal.                                                                     |      |        |
| <b>d)</b> Antalet surjektioner från en $n$ -mängd till en $k$ -mängd är $k \cdot S(n, k)$ (där $S(n, k)$ betecknar ett stirlingtal av andra slaget).        |      |        |
| <b>e)</b> Varje $\pi \in S_n$ (permutationerna av $\{1, 2, \dots, n\}$ ) är en <b>injektion</b> $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . |      |        |
| <b>f)</b> Om $n \geq 2$ är precis hälften av <b>transpositionerna</b> i $S_n$ jämna permutationer.                                                          |      |        |

**Resultat på skrivningen:**

Fylls i av rättaren

| p 1 | p 2 | p 3 | p 4 | p 5 | $\Sigma$ p | G/U | bonus |
|-----|-----|-----|-----|-----|------------|-----|-------|
|     |     |     |     |     |            |     |       |

SF1662, ks3 25.3-15

| Namn | poäng<br>uppg.2 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**2a)** (1p) Vad är koefficienten för  $x^9y^7$  i utvecklingen av

$$(2x + 3y)^{16}?$$

Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

**b)** (1p) Man har 60 lådor och (många, enfärgade) kulor med 8 färger. I varje låda läggs 3 kulor med olika färger.

Måste det finnas (minst) två lådor med samma tre färger på kulorna?

Motivera ditt svar.

**c)** (1p) Ange på cykelform en **udda** permutation  $\pi \in S_9$ , sådan att

$$\pi^2 \neq id, \quad \pi^{10} = id.$$

 $S_9$  är mängden av permutationer av  $\{1, 2, \dots, 9\}$ .  $id$  är identitetspermutationen (i  $S_9$ ).

| Namn | poäng<br>uppg.3 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**3)** (3p) Nattens sysslor har inbringat 113 (identiska) guldmynt för sjörövarna. På hur många olika sätt kan de fördela mynten mellan sig om kaptenen skall ha minst 5 mynt och övriga 9 man i besättningen skall ha minst 2 mynt var? Alla mynten skall fördelas och sjörövarna är (förstås) särskiljbara. Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

| Namn | poäng<br>uppg.4 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**4a)** (2p)  $\pi, \sigma \in S_8$  (mängden av permutationer av  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ) ges på tvåradarsform av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(dvs  $\pi(1) = 6, \pi(2) = 1, \dots$ )

Ange  $\pi^{-1}$  och  $\pi\sigma$  på cykelform.

**b)** (1p)  $\tau \in S_8$  och vi vet att  $\tau = \rho\pi\rho^{-1}$  för något  $\rho \in S_8$  (och  $\pi$  ovan).  
 $\tau$  är på tvåradarsform

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 2 & x & y & z & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

för några  $x, y, z$ .

Finn  $x, y$  och  $z$ . Kom ihåg att motivera svaret.

| Namn | poäng<br>uppg.5 |
|------|-----------------|
|      |                 |

5) (3p) Det är som bekant populärt att vara med i matematikklubbar. Klubben "Kombinatorikerna" har 25 medlemmar, "Algebraikerna" har 32 och "Grafikerna" har 27. 49 personer är med i minst en av de tre klubbarna och 8 är med i alla tre. Hur många är med i precis två av dem? Det bör framgå av lösningen att det givna svaret är den enda möjligheten.

*Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.*