Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 16 februari 2015, i SF1662 Diskret matematik

		sant	falskt
1)	(För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)		
a)	Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finns det precis en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller $a_{n+1} = f(a_n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ [Nej, olika a_0 ger olika följder. Basen för rekursionen fattas.]		X
b)	$A \setminus (B^c \cap C^c) = (A \setminus B^c) \cup (A \setminus C^c)$ är sant för alla mängder A, B, C. [Ja, ses t.ex. med venndiagram eller $A \setminus B^c = A \cap B$, $B^c \cap C^c = (B \cup C)^c$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.]	X	
c)	$\neg(A \vee \neg B) \vDash A \vee B$ för atomära sentenser A, B, C. [Ja, $\neg(A \vee \neg B) : 1$ bara för tolkningen $A : 0$, $B : 1$ som ger $A \vee B : 1$.]	X	
d)	Om $\preceq$ är en partialordning på X och $a, b, c \in X$ uppfyller $a \preceq b$ men $a \npreceq c$ (dvs inte $a \preceq c$), så måste $c \preceq b$. [Nej, inte säkert att $c \preceq a$. Motex: $\{1\} \subseteq \{1\}$, $\{1\} \nsubseteq \{2\}$, $\{2\} \nsubseteq \{1\}$.]		X
e)	Om $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$ och sammansättningen $gf : X \to Z$ är en bijektion, måste f vara en injektion. [Ja, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (gf)(x_1) = (gf)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.]	X	
f)	Om A och B båda är oändliga mängder, finns det säkert en bijektion $f : A \to B$. [Nej, t.ex. ingen bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathbb{R}$, se första boken s. 30f.]		X

2a) (1p) Vi avgör om $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ för alla mängder A och B.

Lösning:

Det gäller inte för några A, B, ty $\varnothing \in$ VL och $\varnothing \notin$ HL.
$A = B = \varnothing$ ger $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ och $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\} = \varnothing$.

Svar: Nej (inte för några A, B).

2b) (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv**.

Lösning:

$\mathcal{R}$ kallas transitiv omm för alla $x, y, z \in X$ gäller $(x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2c) (1p) Vi söker en mängd X och en funktion $f : X \to X$, där f är surjektiv men inte injektiv.

Lösning:

X måste vara oändlig, annars implicerar de två egenskaperna varandra. Man kan ta $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de naturliga talen, och låta f ges av $f(x) = \max(x - 1, 0)$ (dvs $f(x) = x - 1$ om $x \neq 0$, $f(0) = 0$).
f är surjektiv ($f(x+1) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}$), men inte injektiv ($0 \neq 1$, men $f(0) = f(1) = 0$).

Svar: T.ex. $X = \mathbb{N}$, $f(x) = \max(x - 1, 0)$.

3) Vi skall avgöra om relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ som för $A, B \in \mathcal{X}$ ges av att $A\,\mathcal{R}\,B$ omm $A \cap B = \varnothing$ är (a, 1p) reflexiv, (b, 1p) symmetrisk och (c, 1p) transitiv.

Lösning:

a. $\mathcal{R}$ är reflexiv omm $A\,\mathcal{R}\,A$, dvs $A \cap A (= A) = \varnothing$, för alla $A \in \mathcal{X}$. Eftersom det finns $A \neq \varnothing$ i $\mathcal{X}$ är $\mathcal{R}$ inte reflexiv.
b. $\mathcal{R}$ är symmetrisk omm $A\,\mathcal{R}\,B \Rightarrow B\,\mathcal{R}\,A$ för alla $A, B \in \mathcal{X}$, dvs omm $A \cap B = \varnothing \Rightarrow B \cap A = \varnothing$. $A \cap B = B \cap A$ för alla mängder A, B, så $\mathcal{R}$ är symmetrisk.
c. $\mathcal{R}$ är transitiv omm $(A\,\mathcal{R}\,B$ och $B\,\mathcal{R}\,C) \Rightarrow A\,\mathcal{R}\,C$ för alla $A, B, C \in \mathcal{X}$.
Men om $A = C \neq \varnothing$ och $B = \varnothing$ är $A\,\mathcal{R}\,B$ och $B\,\mathcal{R}\,C$ sanna (ty $A \cap B = B \cap C = \varnothing$) och $A\,\mathcal{R}\,C$ falsk (ty $A \cap C = A \cap A = A \neq \varnothing$), så $\mathcal{R}$ är inte transitiv.

Svar: $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ är a: inte reflexiv, b: symmetrisk, c: inte transitiv.

---

4) (3p) Vi skall med naturlig deduktion visa att $(A \wedge B) \to \neg A \vdash A \to \neg B$.
Givna härledningsregler: premiss, antagande, DN, $\wedge$E, $\wedge$I, $\to$E, $\to$I, $\neg$E, $\neg$I.

Lösning:

1	(1)	$(A \wedge B) \to \neg A$	premiss	
2	(2)	A	antagande (för $\to$I)	
3	(3)	B	antagande (för $\neg$I)	
2,3	(4)	$A \wedge B$	2,3 $\wedge$I	
1,2,3	(5)	$\neg A$	1,4 $\to$E	
1,2,3	(6)	$\perp$	5,2 $\neg$E	**Saken är klar**,
1,2	(7)	$\neg B$	3,6 $\neg$I	ty rätt slutsats på rad 8 beror
1	(8)	$A \to \neg B$	2,7 $\to$I	bara av premissen på rad 1.

---

5) (3p) Vi skall visa att om $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uppfyller $a_0 = 0$ och $a_{n+1} = 2\,a_n + 2^{n+1}$ (för $n = 0, 1, 2, \dots$), så är $a_n = n \cdot 2^n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$.

Lösning:

Låt $P(n)$ vara påståendet $a_n = n \cdot 2^n$.
Vi använder matematisk induktion för att visa $P(n)$ för $n \in \mathbb{N}$ $(= \{0, 1, 2, \dots\})$.
Bas: $\mathrm{VL}_0 = a_0 \overset{\text{givet}}{=} 0$, $\mathrm{HL}_0 = 0 \cdot 2^0 = 0$, så $P(0)$ är sann. **Basen är klar**.
Steg: Låt $k \in \mathbb{N}$ och antag $P(k)$. Då är
$\mathrm{VL}_{k+1} = a_{k+1} \overset{\text{givet}}{=} 2\,a_k + 2^{k+1} \overset{\text{ind.ant.}}{=} 2(k \cdot 2^k) + 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1} =$
$= (k+1) \cdot 2^{k+1} = \mathrm{HL}_{k+1}$, så $P(k+1)$ är sann om $P(k)$ är det.
Vi har därmed visat $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$. **Steget är klart**.
Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$. **Saken är klar**.
