

Matematik, KTH

B.Ek

Efternamn	förnamn	personnr

**Kontrollskrivning 2, må 16 februari 2015, 8.30–10.00,
i SF1662 Diskret matematik**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

poäng uppg.1

	sant	falskt
a) Om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ finns det precis en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller $a_{n+1} = f(a_n)$ för $n = 0, 1, 2, \dots$		
b) $A \setminus (B^c \cap C^c) = (A \setminus B^c) \cup (A \setminus C^c)$ är sant för alla mängder A, B, C .		
c) $\neg(A \vee \neg B) \models A \vee B$ för atomära sentenser A, B, C (dvs varje tolkning som gör $\neg(A \vee \neg B)$ sann gör $A \vee B$ sann).		
d) Om $\preceq$ är en partialordning på X och $a, b, c \in X$ uppfyller $a \preceq b$ men $a \not\preceq c$ (dvs inte $a \preceq c$), så måste $c \preceq b$.		
e) Om $f : X \rightarrow Y$ och $g : Y \rightarrow Z$ och sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ är en bijektion, måste f vara en injektion.		
f) Om A och B båda är oändliga mängder, finns det säkert en bijektion $f : A \rightarrow B$.		

Resultat på skrivningen:

Fylls i av rättaren

p 1	p 2	p 3	p 4	p 5	Σ p	G/U	bonus

SF1662, ks2 16.2-15

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Är det för godtyckliga mängder A och B sant att

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)?$$

$\mathcal{P}(X)$ är potensmängden till X ($\{Y \mid Y \subseteq X\}$, mängden av delmängder till X).

Motivera eller ge motexempel.

b) (1p) Vad betyder det (dvs hur definieras) att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv**?

c) (1p) Finn en mängd X och en funktion $f : X \rightarrow X$, sådana att f är surjektiv men inte injektiv.

Namn	poäng uppg.3

3) Låt $\mathcal{X}$ vara $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ($= \{A \mid A \subseteq \mathbb{Z}\}$) och betrakta den relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{X}$ som för $A, B \in \mathcal{X}$ (dvs för godtyckliga mängder A och B av heltal) ges av

$A \mathcal{R} B$ om och endast om $A \cap B = \emptyset$ (dvs A och B är disjunkta).

I svaren på nedanstående frågor skall det tydligt framgå vad det innebär att en relation har respektive egenskap och motiveras att $\mathcal{R}$ har den eller inte har den.

a) (1p) Är $\mathcal{R}$ **reflexiv**?

b) (1p) Är $\mathcal{R}$ **symmetrisk**?

c) (1p) Är $\mathcal{R}$ **transitiv**?

Härledningsregler för naturlig deduktion

Regel för premiss $j \quad (j) \quad p \quad \text{premiss}$ Regel för antagande $j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$ Regel för $\wedge$E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad p \wedge q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \wedge E \\ \text{(eller } q) \end{array}$ Regel för $\rightarrow$ E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \rightarrow q \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \quad j, k \rightarrow E \end{array}$ Regel för $\neg$ E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad \neg p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \perp \quad j, k \neg E \end{array}$	DN-regeln $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \neg \neg p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \text{DN} \end{array}$ Regel för $\wedge$I: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad p \wedge q \quad j, k \wedge I \end{array}$ Regel för $\rightarrow$ I: $\begin{array}{c} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad p \rightarrow q \quad j, k \rightarrow I \end{array}$ Regel för $\neg$ I: $\begin{array}{c} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \perp \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad \neg p \quad j, k \neg I \end{array}$
---	---

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow \neg B.$$

Härledningsreglerna på motstående sida får användas.

Observera att varje steg i härledningen måste motiveras med en regel från listan.

Det är alltså inte tillåtet att "forma om" sentenser med t.ex. boolesk algebra eller dra "uppenbara" slutsatser utan att redovisa vilka härledningsregler som använts.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uppfylla

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}, \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Visa med matematisk induktion att för alla $n = 0, 1, 2, \dots$ är

$$a_n = n \cdot 2^n.$$

Glöm inte att motivera.