Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 2 februari 2015, i SF1662 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Den principala resten då -17 divideras med 7 är -3. [Nej, den är 4. Principala resten är ≥ 0 (och < 7).]		×
b)	$239 = (347)_8$. [Nej, $239 = (357)_8$ $(239 = 29 \cdot 8 + 7,\ 29 = 3 \cdot 8 + 5)$.]		×
c)	$\text{sgd}(m, n) \cdot \text{mgm}(m, -n) = m \cdot n$ för alla heltal m, n med $n < 0 < m$. [Nej, $VL > 0$, $HL < 0$.]		×
d)	Om a, b, c är heltal, $a \mid bc$ men $a \nmid b$ gäller säkert $a \mid c$. [Nej. Motexempel: $a = 4$, $b = c = 2$.]		×
e)	För alla heltal m, n är $\text{sgd}(m, \text{sgd}(m, n)) = \text{sgd}(m, n)$. [Ja, det följer av att $\text{sgd}(m, n) \mid m$ och $\text{sgd}(m, n) \geq 0$ och sgd:s def.]	×	
f)	Om det finns ett heltal x med $ax \equiv 3 \pmod{b}$ så finns säkert ett heltal y med $by \equiv 12 \pmod{a}$ (a, b heltal). [Ja, första ger $\text{sgd}(a, b) \mid 3$ som ger $\text{sgd}(b, a) \mid 12$ som ger andra.]	×	

2a) (1p) Vi söker $(2614)_7 + (6233)_7$ i bas 7.

Lösning:

Räkna i bas 7: $4 + 3 = (10)_7$, $1 + 1 + 3 = 5$, $6 + 2 = (11)_7$, $1 + 2 + 6 = (12)_7$. Resultatet blir $(12150)_7$.
Alternativ (längre): gå till bas 10, summera där $(991 + 2180 = 3171)$ och gå tillbaks till bas 7.

$$\begin{array}{ccccc} & \underline{1} & & \underline{1} & \\ & 2 & 6 & 1 & 4 \\ + & 6 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

Svar: Summan är $(12150)_7$.

---

b) (1p) Vi söker $2^{-1} \cdot 3 + 2 \cdot 3^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{35}$.

Lösning:

Eftersom $2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 36 = 35 + 1$ är $2^{-1} = 18$, $3^{-1} = 12$ i $\mathbb{Z}_{35}$.
Det ger $2^{-1} \cdot 3 + 2 \cdot 3^{-1} = 18 \cdot 3 + 2 \cdot 12 = 54 + 24 = 78 = 8$ i $\mathbb{Z}_{35}$.

Svar: $\mathbf{2^{-1} \cdot 3 + 2 \cdot 3^{-1} = 8}$ i $\mathbb{Z}_{35}$.

---

c) (1p) Vi söker $\text{mgm}(32100, 990)$. $(32100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 107,\ 990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.)$

Lösning:

Den minsta gemensamma multipeln har varje primtalsfaktor till den högsta av dess potenser i talen, så
$\text{mgm}(32100, 990) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 107 = 3 \cdot 11 \cdot 32100 = 11 \cdot 96300 = 1059300$.

Svar: $\mathbf{mgm(32100, 990) = 1\,059\,300}$.

3) Vi söker (a, 1p) alla inverterbara element i $\mathbb{Z}_{26}$ och (b, 2p) inversen till det fjärde av dem.

Lösning:

a. x i $\mathbb{Z}_m$ är inverterbart omm $\mathrm{sgd}(x, m) = 1$, så $(26 = 2 \cdot 13)$ inverterbara är de som inte är delbara med 2 eller 13, dvs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25.
b. 7^{-1} fås med Euklides algoritm: $26 = 3 \cdot 7 + 5$, $7 = 1 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, så $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = -2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = -2 \cdot 7 + 3(26 - 3 \cdot 7) = 3 \cdot 26 - 11 \cdot 7$ och $7^{-1} = -11 = 15$ i $\mathbb{Z}_{26}$.

Svar a: Inverterbara är 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25,
b: $\mathbf{7^{-1} = 15}$ i $\mathbb{Z}_{26}$.

---

4) (3p) Vi söker minsta heltal $a \geq 32$ med $ax + 60y = 7$ för några heltal x, y.

Lösning:

Enligt en känd sats har $ax + 60y = 7$ heltalslösningar x, y omm $\mathrm{sgd}(a, 60) \mid 7$. 7 är ju ett primtal, så dess enda positiva delare är 1 och 7. Eftersom $7 \nmid 60$ betyder det att $\mathrm{sgd}(a, 60) = 1$, dvs $(60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5)$ att $2, 3, 5 \nmid a$.
$2 \mid 32$, $3 \mid 33$, $2 \mid 34$, $5 \mid 35$, $2 \mid 36$, men $2, 3, 5 \nmid 37$, så $a = 37$.

Svar: Det sökta värdet är $\boldsymbol{a = 37}$.

---

5) (3p) Vi söker alla heltal x med $0 \leq x < 84$ och $30x \equiv 36 \pmod{84}$.

Lösning:

$30x \equiv 36 \pmod{84} \Leftrightarrow 30x - 36 = 84k$, ngt heltal $k \Leftrightarrow 5x - 14k = 6$, k heltal. Vi söker först alla lösningar till denna diofantiska ekvation.
Euklides algoritm: $14 = 2 \cdot 5 + 4$, $5 = 1 \cdot 4 + 1$, så $1 = 5 - 4 = 5 - (14 - 2 \cdot 5) = -14 + 3 \cdot 5$. Multiplikation med 6 ger $5 \cdot 18 - 14 \cdot 6 = 6$, så en lösning är $x_0 = 18$, $k_0 = 6$. x, k är en lösning omm $5(x - x_0) - 14(k - k_0) = 6 - 6 = 0$, så $5(x - x_0) = 14(k - k_0)$ och $(\mathrm{sgd}(5, 14) = 1)$ $14 \mid (x - x_0)$, så $x = x_0 + 14n$ för ett heltal n. Det ger $y = y_0 + 5n$. Dessa är också lösningar för alla heltal n. x i det givna intervallet fås då $n = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
(Alternativt: $30x \equiv_{84} 36 \Leftrightarrow 5x \equiv_{14} 6$ (ty $6 \cdot 14 \mid 6(5x - 6) \Leftrightarrow 14 \mid (5x - 6)$) och $5x \equiv_{14} 6 \Leftrightarrow 15x \equiv_{14} 18$ (eftersom $\mathrm{sgd}(3, 14) = 1$ gäller $14 \mid a \Leftrightarrow 14 \mid 3a$). $15x \equiv_{14} x$ och $18 \equiv_{14} 4$, så alla lösningar ges av $x \equiv_{14} 4$.)

Svar: Alla sådana $\boldsymbol{x}$ är 4, 18, 32, 46, 60 och 74.
