

**Svar och lösningsförslag till ks5, 12 maj 2014,
i SF1662 Diskret matematik för CLGYM1, TSVDK2**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om $T = (V, E)$ är ett träd är antalet hörn (noder) i V med udda valens (grad) säkert jämnt. [Jadå. Enligt handslagslemmat gäller det för alla grafer, inte bara träd.]	×	
b) Om $G = (V, E)$ är en sammanhängande graf och $x, y \in V$ finns säkert precis en stig i G från x till y . [Nej. Om G inte är ett träd kan det finnas flera olika sådana stigar.]		×
c) Om alla hörn i graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ har valens 3 och $ V_1 = V_2 $ är G_1 och G_2 säkert isomorfa. [Nej. T.ex. kubgrafen och grafen av två tetraedrar är inte isomorfa.]		×
d) Om G är plan, sammanhängande med valens 4 för alla hörn, måste dualgrafen $G^\perp$ ha precis 2 hörn mer än G . [Ja. $v - e + r = 2$, $4v = 2e$ ger $r = v + 2$ och $v^\perp = r$.]	×	
e) Cykelgrafen C_n (dvs grafen av hörn och kanter i en regelbunden n -hörning) har kromatiskt tal $\chi(C_n) = 3$ för alla $n \geq 3$. [Nej, $\chi(C_n) = 2$ om n är jämnt, $= 3$ om n är udda.]		×
f) Om en bipartit graf är hamiltonsk (dvs har en hamiltoncykel) har den minst två olika fullständiga matchningar. [Ja. Varannan kant i en hamiltoncykel ger en fullständig matchning.]	×	

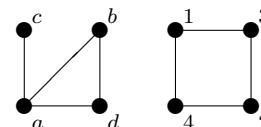
2a) (1p) Vi söker en kant vardera i G_1 och G_2 sådana att graferna som uppstår då de kanterna tas bort är isomorfa.

G_1 :	a	b	c	d	G_2 :	1	2	3	4
	b	a	a	a		3	3	1	1
	c	d		b		4	4	2	2
	d								

Lösning:

Graferna kan ritas som här till höger.

De blir isomorfa om man tar bort a 's kant till b eller d och valfri kant i G_2 .



Svar: En möjlighet (av flera) är att ta bort $\{a, b\}$ och $\{1, 3\}$.

b) (1p) Vi skall formulera Eulers villkor för att grafen G skall vara eulersk.

Lösning:

Grafen G är eulersk om och endast om alla dess hörn har **jämn valens** och den, bortsett från isolerade hörn (hörn med valens 0), är **sammanhängande**.

(Flera alternativ, t.ex. att den saknar udda hörn och alla kanter ligger i samma komponent.)

c) (1p) Vi formulerar Halls sats om fullständig matchning i en bipartit graf.

Lösning:

$G = (X \cup Y, E)$ har en matchning med alla X -hörn matchade omm för alla $A \subseteq X$ gäller $|A| \leq |P(A)|$, där $P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$.

3) (3p) Vi söker antalet komponenter i grafen $G = (V, E)$, då vi vet att den har högst en cykel i varje komponent, att $|V| = 1218$, att $|E| = 1211$ och att antalet cykler är 12.

Lösning:

En komponent utan cykel är ett träd, så antalet hörn i den är ett mer än antalet kanter. En komponent med (precis) en cykel skulle bli ett träd om man tog bort en kant i cykeln, så den har lika många hörn som kanter.

Antalet komponenter utan cykel är alltså $|V| - |E| = 1218 - 1211 = 7$ och antalet komponenter med en cykel är lika med antalet cykler, 12.

Svar: Antalet komponenter i grafen är 19.

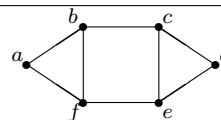
4) (3p) Vi söker medelvalensen för en sammanhängande planär graf med 10 hörn som (då den ritas utan korsande kanter) delar in en sfär i 8 ytor,.

Lösning:

Enligt Eulers polyederformel är (med vanliga beteckningar) $v - e + r = 2$, så $e = v + r - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$. Det sökta medelvärdet är $\frac{\sum_{x \in V} \delta(x)}{v} = \frac{2e}{v} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5}$, där vi använt att summan av valenserna är $2e$.

Svar: Medelvalensen är $\frac{16}{5}$.

5) För grafen G i figuren söker vi (a, 1p) $\chi(G)$, (b, 1p) $P_G(\chi(G))$ och (c, 1p) $P_G(\lambda)$.

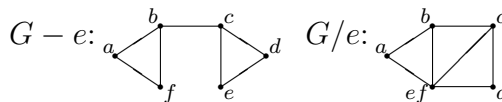


Lösning:

a. Trianglarna som ingår visar att det behövs minst 3 färger för att hörnfärga G . Färgningen $c(a) = c(d) = 1$, $c(b) = c(e) = 2$, $c(c) = c(f) = 3$ visar att 3 färger räcker, så $\chi(G) = 3$.

b. Med 3 färger kan a färgas på 3 sätt, sedan b på 2 sätt och f bara på 1 sätt. (c, e) kan då färgas på 3 sätt. (Om (b, f) t.ex. har färgerna $(1, 2)$ kan (c, e) ges färgerna $(2, 1)$, $(2, 3)$ eller $(3, 1)$.) Sedan kan hörn d bara färgas på 1 sätt. Multiplikationsprincipen ger det totala antalet sätt som $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 18$.

c. Med vanliga beteckningar är $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$. Vi kan ta:



För dem gäller $P_{G-e}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$, ty hörnen kan i ordning färgas på $a : \lambda$, $b : (\lambda - 1)$, $f : (\lambda - 2)$, $c : (\lambda - 1)$, $d : (\lambda - 1)$, $e : (\lambda - 2)$ sätt, respektive $P_{G/e} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$, ty nu fås $a : \lambda$, $b : (\lambda - 1)$, $ef : (\lambda - 2)$, $c : (\lambda - 2)$, $d : (\lambda - 2)$ sätt. Det ger $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2((\lambda - 1)^2 - (\lambda - 2)) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$. (Vi noterar att $P_G(3) = 18$. Skönt.)

Svar a: $\chi(G) = 3$, b: $P_G(\chi(G)) = P_G(3) = 18$,

c: $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$.